CONJUNTOS

A. Noción de conjunto: Un conjunto es una colección de elementos que satisfacen una misma propiedad. Se representan por letras mayúsculas y sus elementos por minúsculas.

B. Relación de pertenencia: Si a es elemento del conjunto A, se dice que a pertenece al conjunto A y se denota por $a \in A$. Caso contrario, se denota por $a \notin A$ y se dirá que a no pertenece al conjunto A.

Ejm.:

Si $B = \{a, e, i, o, u\}$, entonces $i \in B$ pero $w \notin B$.

C. Determinación de un conjunto:

- **Por extensión:** Cuando se muestran todos sus elementos.
- **Por comprensión:** Cuando todos sus elementos quedan determinados por enunciado abierto.

Ejm.:

El conjunto de los primeros cinco números impares:

Por extensión → $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

Por comprensión → $A = \{2n : n \in \mathbb{N} \wedge n \leq 5\}$

Conjuntos especiales

A. Conjunto vacío: Es el conjunto que no posee elementos. Se denota por $\{\ \}$ o usualmente por $\emptyset$.

B. Conjunto unitario: Es un conjunto que posee un único elemento.

C. Conjunto universal: Es el conjunto que posee todos los elementos en un contexto específico. Se denota por U.

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

A. Inclusión de conjuntos: A está contenido en B, denotado por $A \subset B$, cuando:

$$\forall x \in A \Rightarrow x \in B$$

B. No inclusión de conjuntos: A no está contenido en B, denotado por $A \not\subset B$, cuando:

$$\exists x \in A : x \notin B$$

C. Subconjunto propio: A es subconjunto propio de B, denotado por $A \subsetneq B$, cuando:

$$\exists x \in B : x \notin A$$

D. Igualdad de conjuntos: A es igual a B, denotado por $A = B$, cuando:

$$A \subset B \wedge B \subset A$$

E. Conjuntos disjuntos: A y B son disjuntos, denotado por $A \sqcup B$, cuando no poseen elementos en común.

F. Conjuntos equipotentes: Son aquellos que poseen la misma cantidad de elementos.

G. Conjuntos comparables: A y B son comparables cuando se distingue entre ellos una relación de inclusión.

DEFINICIONES Y PROPIEDADES

A. Conjunto finito: Es en el cual el proceso de contar sus elementos tiene fin.

B. Cardinal de un conjunto: El cardinal de A es su cantidad de elementos. Se denota por $n(A)$.

C. Conjunto potencia: El conjunto potencia de A es el conjunto formado por todos sus subconjuntos. Se denota por $P(A)$.

D. Par ordenado: Es un conjunto de dos elementos donde se considera el orden. Se representa por (a, b). La igualdad se define por:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

E. Producto cartesiano: El producto cartesiano de A con B, se define como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Propiedades: Dados dos conjuntos A y B:

- $n[P(A)] = 2^{n(A)}$
- $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$
- $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$
- Si $A \cap B = \emptyset$, entonces: $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- $\emptyset$ es subconjunto de todo conjunto

OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

A. Intersección: A intersectado con B:

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \wedge x \in B\}$$

B. Unión: A unido con B:

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \vee x \in B\}$$

C. Diferencia: A menos B:

$$A - B = \{x \in U : x \in A \wedge x \notin B\}$$

D. Complemento: Complemento de A:

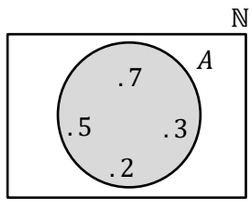
$$A^c = \{x \in U : x \notin A\}$$

E. Diferencia simétrica: A diferencia simétrica con B:

$$A\Delta B = \{x \in U: (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\}$$

REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Diagrama de Venn – Euler: Es la representación geométrica mediante una región del plano limitada por una figura cerrada en la cual se indican sus elementos.



$$A = \{x \in \mathbb{N}: x\ es\ un\ primo\ menor\ que\ 10\}$$

Diagrama de Carrol: Es una representación en tablas para representar conjuntos disjuntos.

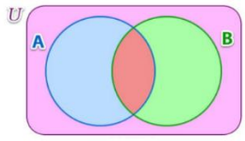
	A	A^C	$n(U)$
B	$A \cap B$	$B - A$	$n(A \cap B) + n(B - A)$
B^C	$A - B$	$A^C \cap B^C$	$n(A - B) + n(A^C \cap B^C)$

DIAGRAMAS DE VENN – EULER PARA LAS OPERACIONES

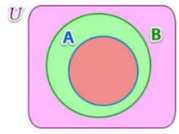
C cada operación se representará de color coral.

➢ **Intersección:**

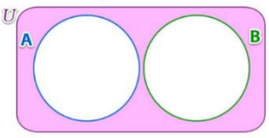
- Si $A \cap B \neq \emptyset$



- Si $A \subset B:\ A \cap B = A$

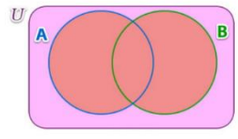


- Si $A \cap B = \emptyset$

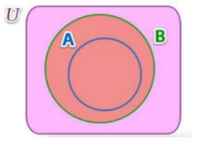


➢ **Unión:**

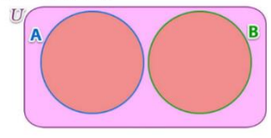
- Si $A \cap B \neq \emptyset$



- Si $A \subset B:\ A \cup B = B$

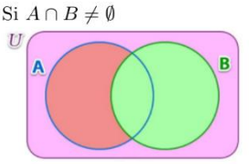


- Si $A \cap B = \emptyset$

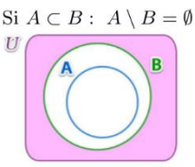


➢ **Diferencia:**

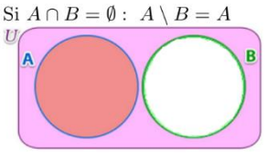
- Si $A \cap B \neq \emptyset$



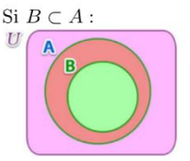
- Si $A \subset B:\ A \setminus B = \emptyset$



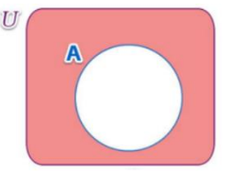
- Si $A \cap B = \emptyset:\ A \setminus B = A$



- Si $B \subset A:$



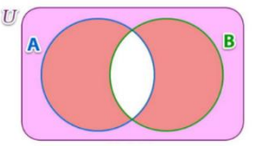
➢ **Complemento:**



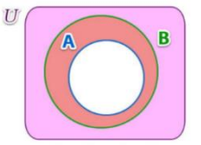
Nota: $U^c = \emptyset$
$\emptyset^c = U$

➢ **Diferencia simétrica:**

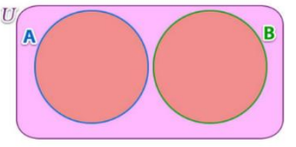
- Si $A \cap B \neq \emptyset$



- Si $A \subset B:\ A\Delta B = B \setminus A$



- Si $A \cap B = \emptyset: A\Delta B = A \cup B$



Nota: $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$

ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

➢ **Ley involutiva:** $(A^c)^c = A$

➢ **Ley de idempotencia:** $A \cup A = A$
$A \cap A = A$

➢ **Ley conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$
$A \cap B = B \cap A$

➢ **Ley asociativa:** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

➢ **Ley distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

➢ **Ley de De Morgan:** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

- **Ley de diferencia:** $A - B = A \cap B^c$

- **Ley del complemento:** $A \cup A^c = U$
  $A \cap A^c = \emptyset$

- **Ley de la unidad:** $A \cup U = U$
  $A \cap U = A$
  $A \cup \emptyset = A$
  $A \cap \emptyset = \emptyset$

- **Ley de absorción:** $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$
  $A^C \cup (A \cap B) = A^C \cup B$
  $A^C \cap (A \cup B) = A^C \cap B$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular $a + b + c$ si los siguientes conjuntos son unitarios e iguales:

$$A = \{2a + b, c\}$$
$$B = \{2c - 7, 5b + 2\}$$

Solución:

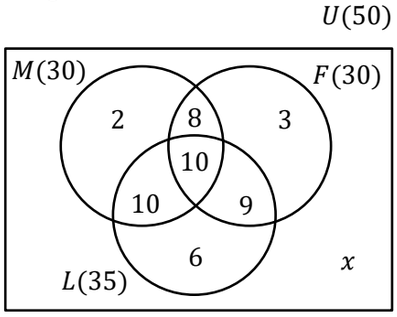
Como son unitarios: $c = 2c - 7$, por lo que $c = 7$. Y en el segundo conjunto: $5b + 2 = 7$, de donde $b = 1$. Finalmente, en el primer conjunto: $2a + 1 = 7$, esto implica que $a = 3$. Así, $a + b + c = 11$.

2. En un aula de CEPU con 50 estudiantes se sabe que:
   - 30 prefieren Matemática
   - 30 prefieren Física
   - 35 prefieren Literatura
   - 18 prefieren Matemática y Física
   - 19 prefieren Física y Literatura
   - 20 prefieren Matemática y Literatura

Además, se sabe que 10 tienen gusto por los tres cursos. ¿Cuántos no tienen preferencia por ninguno de los tres?

Solución:

Usando diagrama de Venn-Euler:



Los estudiantes que no prefieren ningún curso son x y quedan fuera de los conjuntos diagramados. Sumando los elementos e igualando a la cantidad del universo U:

$$2 + 8 + 10 + 10 + 3 + 9 + 6 + x = 50$$
$$48 + x = 50$$

Luego, $x = 2$.

3. En un grupo de 120 estudiantes de CEPU se observó que:
   - 52 son mujeres
   - 40 estudian Física
   - 25 mujeres no estudian Física

¿Cuántos varones no estudian Física?

Solución:

Usando diagrama de Carroll, supongamos que x varones no estudian ingeniería:

	ESTUDIAN FÍSICA	NO ESTUDIAN FÍSICA	TOTAL (120)
VARONES	13	x	$13 + x$
MUJERES	27	25	50

Sumando los elementos e igualando a la cantidad total:

$$13 + x + 50 = 120$$
$$63 + x = 120$$

Luego, $x = 57$.

4. Dado el siguiente conjunto:

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : -7 < 4x + 1 < 21\}$$

Hallar cuántos subconjuntos propios tiene.

Solución:

De la condición:

$$-7 < 4x + 1 < 21 \Rightarrow -2 < x < 5$$

Por lo que: $M = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$. De esto se obtiene que $n(M) = 6$, por lo que la cantidad de subconjuntos propios es:

$$2^{n[P(M)]} - 1 = 2^6 - 1 = 63$$

5. Dados los conjuntos:

$$A = \{1, \{2\}, \{\emptyset\}\}$$
$$B = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{2\}\}, \{3\}\}$$

Hallar $n[P(A) \cap B]$.

Solución:

Hallando $P(A)$:

$$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{\{2\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{1, \{2\}\}, \{\{2\}, \{\emptyset\}\}, \{1, \{\emptyset\}\}\}$$

Por lo que la intersección con B será:

$$P(A) \cap B = \{\emptyset, \{\{2\}\}\}$$

Y finalmente, $n[P(A) \cap B] = 2$

NUMERACIÓN

A. Sistema de numeración: Es el conjunto de reglas y principios empleados para expresar y escribir mediante símbolos representaciones numéricas.

B. Número: Es un elemento matemático que nos transmite una idea de cantidad.

C. Numeral: Es la representación escrita de un número por medio de símbolos llamados cifras, guarismos o dígitos.

Ejm.:

$$4, IV, \blacksquare\blacksquare\blacksquare\blacksquare, ****, ||||$$

PRINCIPIOS DE NUMERACIÓN

A. Del orden: Toda cifra en el numeral tiene un orden y lugar, por convención se enumera de derecha a izquierda.

Lugar	1°	2°	3°	4°
Número	2	0	2	1
Orden	4	3	2	1

B. De la base: La base es un numeral referencial que indica cómo se agrupan las unidades de un orden cualquiera para formar la unidad colectiva del orden inmediato superior.

Ejm.:

Base 10: $\underbrace{* * * * * *}_{un\ grupo\ de\ 10}$ $* * * * *$

Como en la representación sobran 2, se escribe 12.

Representaremos un numeral N en base n por N_n, para el cual se cumple:

$$n \text{ es base de numeración} \Rightarrow n > 1$$

C. De relación aparente: En una igualdad de dos numerales, a mayor numeral aparente le corresponde menor base.

$$\text{Dado } M_m = N_n \text{ , entonces: } M > N \Rightarrow m < n.$$

D. De las cifras: Las cifras son números naturales que siempre son menores que la base de numeración.

$$N = \overline{ab\ldots yz}_n \Rightarrow 0 < a < n, b < n, \ldots, y < n, z < n.$$

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

BASE	NOMBRE	CIFRAS USADAS
2	Binario	0,1
3	Ternario	0,1,2
4	Cuaternario	0,1,2,3
5	Quinario	0,1,2,3,4
6	Senario	0,1,2,3,4,5
7	Heptanario	0,1,2,3,4,5,6
8	Octanario	0,1,2,3,4,5,6,7
9	Nonario	0,1,2,3,4,5,6,7,8
10	Decimal	0,1,2,3,4,5,6,7,8,9
11	Undecimal	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha$
12	Duodecimal	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha,\beta$
⋮	⋮	⋮
n	Enesimal	$0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,\alpha,\beta,\ldots,(n-1)$

DESCOMPOSICIONES

Descomposición polinómica: Tiene las características de un polinomio donde la base de numeración es la variable, los coeficientes son las cifras que componen el número y el grado es una unidad menos que la cantidad de cifras.

$$\overline{abc}_n = a \times n^2 + bn + c$$
$$\overline{abcd}_n = a \times n^3 + bn^2 + c \times n + d$$
$$\overline{abcde}_n = a \times n^4 + b \times n^3 + c \times n^2 + d \times n + e$$
$$\vdots$$

Descomposición por bloques: Es un caso particular de la descomposición polinómica que consiste en tomar un bloque considerándolo como una cifra.

Ejm.:

- $2324 = 23 \times 10^2 + 24$
- $\overline{abcabc}_n = \overline{abc} \times 10^3 + abc$

CAMBIO DE BASE

A. De base $n \neq 10$ a base 10: Se procede por descomposición polinómica.

Ejm.:

$$342_7 = 3 \times 7^2 + 4 \times 7 + 2 = 177$$

B. De base 10 a base $n \neq 10$: Se procede por divisiones sucesivas entre la base n hasta llegar al primer cociente $q < n$. Si en este proceso se obtienen los restos en el siguiente orden: $r_1, r_2, \dots, r$; entonces el numeral obtenido es $\overline{qr \dots r_2 r_1}_n$.

C. De base $m \neq 10$ a base $n \neq 10$: No hay un método directo, por lo que tienen que emplearse los dos métodos vistos previamente.

Propiedades:

- El mayor numeral de k cifras en base n tiene una fórmula de conversión a base 10:

$$\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\dots(n-1)}}_{k\ cifras}{}_n = n^k - 1$$

- Para bases sucesivas, un caso especial tiene la siguiente fórmula:

$$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\dots_{\overline{1x}_n}}}} = n + (a + b + c + \cdots + x)$$

- Si un número N_n tiene k cifras, se cumple:

$$n^{k-1} \leq N_n < n^k$$

- Un número capicúa es aquel que tiene cifras equidistantes iguales. Es decir, se leen de igual manera de izquierda a derecha y viceversa. Una propiedad de estos números es:

$$\overline{ababab}_n = 10101_n \times \overline{ab}_n$$

Y análogamente para más cifras.

CUATRO OPERACIONES

A. Adición: Es la operación que consiste en reunir dos o más cantidades homogéneas, llamados sumandos, en una sola.

Ejm.:

$$635_8 + 624_8 + 356_8$$

Como está en base 8, se deben formar grupos de 8.

En las unidades:

$$5_8 + 4_8 + 6_8 = 15_8 = 8 \times 1 + \mathbf{7}$$

Se tiene **7** y se lleva **1** a las decenas.

En las decenas:

$$\mathbf{1} + 3_8 + 2_8 + 5_8 = 11_8 = 8 \times 1 + \mathbf{3}$$

Se tiene **3** y se lleva **1** a las centenas.

En las centenas:

$$\mathbf{1} + 6_8 + 6_8 + 3_8 = 16_8 = 8 \times 2 + \mathbf{0}$$

Se tiene **0** y se coloca **2** a las unidades de millar.

Así:

$$635_8 + 624_8 + 356_8 = 2037_8$$

B. Sustracción: Es la operación inversa a la adición, dadas dos cantidades llamadas minuendo (M) y sustraendo (S), consiste en poder encontrar otra cantidad llamada diferencia (D), tal que sumada con el sustraendo reproduzca el minuendo. Notación:

$$M - S = D$$

Propiedades:

- $M + S + D = 2M$
- Para números de tres cifras no capicúas:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{p9q}, \text{ con } p + q = 9$$

- Si $a + b = 9$: $\overline{a9b} + \overline{b9a} = 1089$

Complemento aritmético (CA)

El complemento aritmético de un número natural es la cantidad que le falta a este número para ser igual a la unidad del orden inmediato superior con respecto a su cifra de mayor orden.

Ejm.:

$$CA(36) = 100 - 36 = 64$$
$$CA(42_7) = 100_7 - 42_7 = 25_7$$

En general:

Si en número N que tiene k cifras en base 10:

$$CA(N) = 10^k - N$$

Regla práctica: El complemento aritmético de un número natural en base n, consiste en restar de n la última cifra significativa, mientras que las demás cifras de orden superior se restan de $n - 1$.

Ejm.:

$$CA(72472) = 27528$$

- $10 - 2 = 8$
- $9 - 7 = 2$
- $9 - 4 = 5$
- $9 - 2 = 7$
- $9 - 7 = 2$

Ejm.:

$$CA(4635000) = 5365000$$

- $10 - 5 = 5$
- $9 - 3 = 6$
- $9 - 6 = 3$
- $9 - 4 = 5$

Propiedad: Sea N un número de n cifras. Si $CA(N)$ tiene m cifras, entonces las $(m - n)$ primeras cifras de N son cifras máximas.

C. Multiplicación: Es la operación directa que consiste en repetir como sumando un número llamado multiplicando (M), tantas veces como lo indica otro número llamado multiplicador (N) y así conseguir un resultado llamado producto (P). Notación:

$$M \times N = P$$

D. División: Es la operación que consiste en determinar cuántas veces una cantidad llamada dividendo (D) contiene a otra cantidad llamada divisor (d).

1. **División exacta:** Es la que tiene como residuo 0. En este caso, el dividendo contiene al divisor una cantidad exacta de veces.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array}$$

Se cumple:

$$D = d \times q$$

2. **División inexacta:** Es la que tiene un residuo diferente de 0 y se realiza de dos maneras, por defecto y por exceso.

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r_{def} & q \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} D & d \\ \hline r_{exc} & q \end{array}$$

Se cumple:

$$D = d \times q + r_{def}$$
$$D = d \times q - r_{exc}$$

Propiedades:

- $r_{def} + r_{exc} = d$
- $0 < r < d$
- $residuo_{mínimo} = 1$
- $residuo_{máximo} = d - 1$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar $a + b + m + n$ si se cumple que:

$$\overline{aba}_n = \overline{b1n}_m$$

Siendo $b > 4$ y $m < 9$.

Solución:

Por condiciones de existencia y por la relación aparente:

$$4 < b < a < n < m < 9$$

Como todos son números naturales, toman las posiciones correspondientes en:

$$4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$$

Por lo que:

$$a + b + m + n = 6 + 5 + 8 + 7 = 26$$

2. Sabiendo que $\overline{ab}_n = \overline{ba}_7$, hallar el máximo valor de n.

Solución:

Usando descomposición polinómica:

$$na + b = 7b + a$$
$$n = \frac{6b}{a} + 1$$

Y como $a, b < 7$, elegimos $a = 1$ y $b = 6$. Así, $n = 37$.

3. Si $\overline{aaaa}_5 = \overline{bc8}$, hallar $a \times b \times c$.

Solución:

Por el principio de la base, se tiene que $a < 5$. Además, por la descomposición polinómica:

$$a \times 5^3 + a \times 5^2 + a \times 5 + a = \overline{bc8}$$
$$156 \times a = \overline{bc8}$$

Para que 156 sea factor del producto que termina en 8, debe cumplirse $a \in \{3,8\}$, pero como $a < 6$, se tiene que $a = 3$. Luego:

$$156 \times a = 156 \times 3 = 468 = \overline{bc8} \;\Rightarrow\; b = 4, c = 6$$

Así: $a \times b \times c = 3 \times 4 \times 6 = 72$.

4. Hallar la suma de las cifras de S:

$$S = 8 + 98 + 998 + \cdots + \underbrace{999\ldots98}_{50\ cifras}$$

Solución:

Como los sumandos son cercanos a potencias de 10, escribimos:

$$8 = 10^1 - 2$$
$$98 = 10^2 - 2$$
$$998 = 10^3 - 2$$
$$\vdots$$
$$999\ldots98 = 10^{50} - 2$$

Sumando verticalmente:

$$S = \underbrace{111111111\ldots111110}_{51\ cifras} - 2(50)$$

$$S = \underbrace{111111111\ldots111010}_{51\ cifras}$$

Por lo que las cifras de S suman 49.

5. Si se cumple que $CA(\overline{abcd}) = a + b + c + d$. Hallar $(a - c) \times (b - d)$.

Solución:

Como $a + b + c + d$ es como máximo 36 (de 2 cifras), por propiedad del complemento aritmético, tenemos que las $(4 - 2)$ primeras cifras deben ser máximas, por lo que:

$$\overline{abcd} = \overline{99cd} \Rightarrow a = b = 9$$

Luego:

$$\begin{aligned} CA(\overline{99cd}) &= 10^4 - \overline{99cd} \\ &= 10000 - 9900 - \overline{cd} \\ &= 100 - 10c - d \\ &= a + b + c + d \\ &= 9 + 9 + c + d \end{aligned}$$

De donde se obtiene que:

$$82 = 11c + 2d$$

Y al ser $2d$ par, debe serlo también $11c$. La única opción de valores es $c = 6$ y $d = 8$. Por lo que:

$$(a - c) \times (b - d) = (9 - 6) \times (9 - 8) = 3 \times 1 = 3$$

DIVISIBILIDAD

A. Divisibilidad: Se dice que dos números son divisibles entre sí, cuando al dividir uno de ellos por el otro, el resto es cero.

B. Multiplicidad: Los múltiplos de un número son aquellos que se obtienen multiplicando a dicho número por cualquier otro número entero.

Notación: A es múltiplo de n, se denota $A = \mathring{n}$.

Ejm.:

Los múltiplos de 5 son:

$$\mathring{5} = 8k, \text{ para valores enteros de } k$$

es decir:

$$\mathring{5} = \{\dots, -10, -5, 0, 5, 10, \dots\}$$

Nota: El 0 es múltiplo de cualquier número entero.

C. Multiplicidad con resto: Dado $n \in \mathbb{N}$, un número N puede no ser múltiplo exacto de n, sino tener un resto por defecto o exceso, en este caso:

$$N = \mathring{n} + r_{def}$$

$$N = \mathring{n} + r_{exc}$$

$$r_{def} + r_{exc} = \mathring{n}$$

Ejm.:

50 no es múltiplo de 3 pero se puede expresar como:

$$50 = \mathring{3} + 2 = \mathring{3} - 1$$

Propiedades básicas

Dado $n, r \in \mathbb{N}$:

1. $\mathring{n} \pm \mathring{n} = \mathring{n}$
2. $\forall k \in \mathbb{Z}: \ k\mathring{n} = \mathring{n}$
3. $\forall k \in \mathbb{Z}^+: \ (\mathring{n})^k = \mathring{n}$
4. $(\mathring{n} + r)^k = \mathring{n} + r^k, \ \forall k \in \mathbb{Z}^+$
5. $(\mathring{n} - r)^p = \begin{cases} \mathring{n} - r^p, & si\ p\ es\ impar \\ \mathring{n} + r^p, & si\ p\ es\ par \end{cases}$
6. $A = m \times n \implies A = \mathring{m} \wedge A = n$
7. $(\mathring{n} + a)(\mathring{n} + b) = \mathring{n} + ab, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$

D. Principio de Arquímedes: Si el producto de dos números enteros es múltiplo de n pero alguno de estos no tiene factores en común con n, entonces el otro debe ser múltiplo de n.

$$A \times B = \mathring{n} \ \wedge \ A \neq \mathring{n} \implies B = \mathring{n}$$

Propiedades adicionales:

- $N = \overline{abcd}_n \implies N = \begin{cases} \mathring{n} + d \\ \mathring{n}^2 + \overline{cd} \\ \mathring{n}^3 + \overline{bcd} \end{cases}$
- Si $N = a \ \wedge \ N = b$, entonces $N = \overline{\mathring{mcm}(a, b)}$
- Si $N = a + r \ \wedge \ N = b + r$, entonces:

$$N = \overline{\mathring{mcm}(a, b)} + \mathring{r}$$

RESTOS POTENCIALES

Los restos potenciales son residuos que dejan las potencias enteras sucesivas y positivas de un número entero $N \neq 0$ al ser dividido entre n.

Ejm.: Los restos potenciales de las potencias de 5 respecto al múltiplo 9.

$$5^0 = \mathring{9} + 1 \qquad 5^3 = \mathring{9} + 8 \qquad 5^6 = \mathring{9} + 1$$
$$5^1 = \mathring{9} + 5 \qquad 5^4 = \mathring{9} + 4 \qquad 5^7 = \mathring{9} + 5$$
$$5^2 = \mathring{9} + 7 \qquad 5^5 = \mathring{9} + 2 \qquad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Los restos son $1, 5, 7, 8, 4, 2$

Método práctico: En forma práctica, cada residuo se multiplica por la base de potenciación y se expresan respecto al múltiplo utilizado, así se obtiene el siguiente residuo.

Gaussiano: El gaussiano de un entero N respecto al múltiplo n es la cantidad de restos potenciales no nulos diferentes entre sí, que se repiten periódicamente.

Ejm.:

En el ejemplo anterior, en que los restos potenciales son $1, 5, 7, 4, 2$; el gaussiano es $G = 6$.

PRINCIPALES CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Consideremos un número $N = \overline{abcdef}$. Entonces, N es:

Divisible por 2: Si la última cifra es par. Es decir, $f = \mathring{2}$.

Divisible por 3: Si la suma de sus cifras es múltiplo de 3. Es decir, $a + b + c + d + e + f = \mathring{3}$. En caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividirlo entre 3.

Divisible por 4: Si la suma de los productos de las dos últimas cifras de derecha a izquierda, multiplicadas por los números $1, 2$, respectivamente, es múltiplo de 4. Es decir, $f + 2e = \overset{\circ}{4}$.

Divisible por 5: Si la última cifra es múltiplo de 5. Es decir, $f = \overset{\circ}{5}$.

Divisible por 5^n: Si las n últimas cifras forman un número que es múltiplo de 5.

Divisible por 7: Si la suma de los productos de cada cifra de derecha a izquierda, multiplicada por los números $1, 3, 2, -1, -3, -2, \ldots$, respectivamente, es un múltiplo de 7. Es decir, $f + 3e + 2d - c - 3b - 2a = \overset{\circ}{7}$. En caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividirlo entre 7.

Divisible por 8: Si la suma de los productos de las tres últimas cifras de derecha a izquierda, multiplicadas por los números $1, 2, 4$, respectivamente, es múltiplo de 8. Es decir, $f + 2e + 4d = \overset{\circ}{8}$.

Divisible por 2^n: Si las n últimas cifras forman un número que es múltiplo de 2.

Divisible por 9: Si la suma de sus cifras es múltiplo de 9. Es decir, $a + b + c + d + e + f = \overset{\circ}{9}$. En caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividirlo entre 9.

Divisible por 11: Si la suma de sus cifras de orden impar menos la suma de sus cifras de orden par es múltiplo de 11. Es decir, $(a + c + e) - (b + d + f) = \overset{\circ}{11}$. En caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividirlo entre 11.

Divisible por 13: Si la suma de los productos de cada cifra de derecha a izquierda, multiplicada por los números $1, -3, -4, -1, 3, 4, 1, -3, \ldots$, respectivamente, es múltiplo de 13. Es decir:

$$f - 3e - 4d - c + 3b + 4a = \overset{\circ}{13}.$$

En caso contrario, dicha suma determina el residuo de dividirlo entre 13.

Divisible por 33: Cuando al formar bloques de 2 cifras de derecha a izquierda, la suma de es múltiplo de 33. Es decir, $\overline{ef} + \overline{cd} + \overline{ab} = \overset{\circ}{33}$.

Divisible por 99: Cuando al formar bloques de 2 cifras de derecha a izquierda, la suma de es múltiplo de 99. Es decir, $\overline{ef} + \overline{cd} + \overline{ab} = \overset{\circ}{99}$.

Nota: Si fuera un número con una cantidad impar de cifras, el último bloque es de una cifra.

Divisible por $m \times n$: Si es divisible simultáneamente por m y por n.

NÚMEROS PRIMOS

A. **La unidad:** Es el único número entero que posee un único divisor.

B. **Número primo:** Es aquel número mayor que la unidad que admite únicamente dos divisores, él mismo y la unidad. Los números primos son infinitos, los primeros números primos son:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43 \ldots$$

Criterio de Eratóstenes: Dado $N > 1$ en $\mathbb{N}$. Si no existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $1 < q \leq \sqrt{N}$ que sea divisor de N, entonces N es un número primo.

Propiedades: Sea p un número primo:

- Si $p \geq 2$, entonces $p = \overset{\circ}{4} \pm 1$.
- Si $p > 3$, entonces $p = \overset{\circ}{6} \pm 1$.
- Teorema de Wilson: $(p-1)! = \overset{\circ}{p} - 1$

C. **Números simples:** Son aquellos formados por la unión de la unidad y los números primos.

D. **Números compuestos:** Son aquellos que no son simples, es decir, aquellos números naturales que admiten más de dos divisores.

E. **Clasificación de los divisores:**

- **Divisor simple:** Todo aquel divisor que es un número simple.
- **Divisor compuesto:** Todo aquel divisor que es un número compuesto.
- **Divisor primo:** Todo aquel divisor que es un número primo.
- **Divisor propio:** Todo aquel divisor que es diferente del propio número.

Propiedades: La cantidad de divisores de un número natural N, denotado por $CD(N)$, se compone en simples y compuestos. Además, se cumple que:

$$CD(N) = CD(N)_{simples} + CD(N)_{compuestos}$$
$$CD(N)_{simples} = CD(N)_{primos} + 1$$
$$CD(N)_{propios} = CD(N) - 1$$

F. Números primos relativos (PESI): Dos números naturales son primos relativos, coprimos o también llamados primos entre sí (PESI) cuando tienen como único divisor común a la unidad.

> **Nota:** Para que dos números sean PESI no es necesario que sean primos.

Propiedades:

- La unidad es PESI con todo número natural.
- Tres o más números son PESI cuando el único divisor común a todos es la unidad.
- Tres o más números son **"PESI dos a dos"** cuando tomados de dos en dos, son PESI.
- Ser PESI dos a dos, implica ser PESI. Pero lo contrario no es siempre verdadero.
- Si N es PESI con $m \times n$, entonces es PESI con cada factor.
- Dos números consecutivos siempre son PESI.
- Si en un grupo de números dos son PESI, entonces todos son PESI.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Todo número natural mayor que la unidad puede ser representado de forma única, salvo reordenación, como producto de potencias de números primos. Esta representación es llamada *descomposición canónica* y será abreviada como D.C.

Ejm.: $240 = 2^4 \times 3 \times 5$

Esto quiere decir que todo número natural mayor que la unidad es divisible por algún número primo.

Exponente de un primo en la D.C. de $N!$: Primero, se debe escribir la D.C. de $N!$:

$$N! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \ldots \times q^n \times \ldots \times p^z$$

Para determinar el exponente n del primo q de su D.C., se divide sucesivamente N entre q y se suman los cocientes obtenidos.

Ejm.:

Hallar el exponente de 3 en la D.C. de 36!, se tiene:

$$\begin{array}{r|l} 36 & 3 \\ 12 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

como $12 + 4 + 1 = 17$, la D.C. de 36! tiene la forma:

$$36! = 2^a \times 3^{17} \times 5^c \times \ldots \times 31^z$$

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO NATURAL

Sea $N > 1$ en $\mathbb{N}$. Supongamos que su D.C. es dada por:

$$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \ldots \times p^z$$

pudiendo ser algún exponente igual a cero. Entonces:

A. Cantidad de divisores de N: Es dada por:

$$CD(N) = (a+1) \times (b+1) \times (c+1) \times \ldots \times (z+1)$$

B. Cantidad de divisores de N que son $\mathring{m}$:

$$CD(N, \mathring{m}) = CD\left(\frac{N}{m}\right)$$

C. Suma de divisores de N: Es dada por:

$$SD(N) = \left(\frac{2^{a+1}-1}{2-1}\right) \times \left(\frac{3^{b+1}-1}{3-1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{p^{z+1}-1}{p-1}\right)$$

D. Suma de divisores de N que son $\mathring{m}$:

$$SD(N, \mathring{m}) = m \times SD\left(\frac{N}{m}\right)$$

E. Suma de las inversas de los divisores de N: Es dada por:

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

F. Suma de las inversas de los divisores de N que son $\mathring{m}$:

$$SID(N, \mathring{m}) = \frac{SD(N/m)}{N}$$

G. Producto de divisores de N: Es dado por:

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

H. Producto de divisores de N que son $\mathring{m}$: Es dado por:

$$PD(N, \mathring{m}) = m^{CD(N/m)} PD\left(\frac{N}{m}\right)$$

FUNCIÓN DE EULER

Denotada por ϕ, es la que permite calcular la cantidad de números PESI con N que son menores que N. Si se tiene la D.C. siguiente:

$$N = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \ldots \times p^z$$

Entonces:

$$\phi(N) = N \times \left(1 - \frac{1}{a}\right) \times \left(1 - \frac{1}{b}\right) \times \left(1 - \frac{1}{c}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{1}{z}\right)$$

Además, si N es primo: $\phi(N) = N - 1$.

Ejm.: Determine la cantidad de números menores y PESI con 360.

Usando la función de Euler, como $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$:

$$\phi(360) = 360 \times \left(1-\frac{1}{2}\right) \times \left(1-\frac{1}{3}\right) \times \left(1-\frac{1}{5}\right)$$
$$= 360 \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{4}{5}\right)$$
$$= 96$$

Existen 96 números menores y PESI con 360.

Teorema de Euler: Dados dos números PESI p y $q > 1$:

$$p^{\phi(q)} = \overset{\circ}{q} + 1$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el residuo de dividir 147×228 entre 5.

Solución:

Escribiendo en función del múltiplo 5, se tiene:

$$147 = \overset{\circ}{5} + 2$$
$$228 = \overset{\circ}{5} + 3$$

Luego:

$$147 \times 228 = (\overset{\circ}{5} + 2)(\overset{\circ}{5} + 3) = \overset{\circ}{5} + 6 = \overset{\circ}{5} + 1$$

Por lo que, el residuo es $r = 1$.

2. Hallar el residuo que resulta al dividir el producto de los 100 primeros números primos entre 4.

Solución:

Escribimos el producto como:

$$N = \underbrace{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \ldots \times p}_{100\ primos}$$

Como este posee un factor par, que es 2 y lo demás como producto de impares, se puede considerar este grupo como un segundo factor impar, por lo que, para algún $n \in \mathbb{N}$:

$$N = 2(2n+1) = 4n + 2 = = 4 + \overset{\circ}{2}$$

Por lo que, el residuo es $r = 2$.

3. Sabiendo que $\overline{ab} = \overset{\circ}{19} + 14$ y $\overline{cd} = \overset{\circ}{19} + 7$. Determinar el residuo de la división de $\overline{abcd}$ entre 19.

Solución:

Descomposición por bloques:

$$\overline{abcd} = 100 \times \overline{ab} + \overline{cd}$$
$$= 100(\overset{\circ}{19} + 14) + (\overset{\circ}{19} + 7)$$
$$= \overset{\circ}{19} + 1400 + \overset{\circ}{19} + 7$$
$$= \overset{\circ}{19} + 1407$$
$$= \overset{\circ}{19} + \overset{\circ}{19} + 1$$
$$= \overset{\circ}{19} + 1$$

Por lo tanto, el residuo es $r = 1$.

4. Calcular cuántos divisores que son múltiplos de 6 pero no de 5, tiene el número 18000.

Solución:

Por descomposición canónica se tiene:

$$18000 = 2^4 \times 3^2 \times 5^3$$

Es decir:

$$18000 = 6 \times (2^3 \times 3^1 \times 5^3)$$

Por lo que:

$$CD(18000,\overset{\circ}{6}) = (3+1)(1+1)(3+1) = 32$$

Y si no deben ser múltiplos de 5, no deberán ser de 30.

$$18000 = 30 \times (2^3 \times 3^1 \times 5^2)$$

Por lo que:

$$CD(18000,\overset{\circ}{30}) = (3+1)(1+1)(2+1) = 24$$

Finalmente, se pide:

$$CD(18000,\overset{\circ}{6}) - CD(18000,\overset{\circ}{30}) = 32 - 24 = 8$$

5. Cierto número N, del cual se sabe que al dividirlo entre $3, 4, 5, 6$ y 9, deja residuo 1. Además, al dividirlo entre 7 deja residuo 0. Hallar la suma de las cifras del menor valor que puede asumir N.

Solución:

Por los datos del problema, se puede escribir:

$$N = \overset{\circ}{3} + 1$$
$$N = \overset{\circ}{4} + 1$$
$$N = \overset{\circ}{5} + 1$$
$$N = \overset{\circ}{6} + 1$$
$$N = \overset{\circ}{9} + 1$$

Entonces, $N = \overline{mcm(\overset{\circ}{3},\overset{\circ}{4},\overset{\circ}{5},\overset{\circ}{6},\overset{\circ}{9})} + 1 = \overset{\circ}{180} + 1$. Pero también se sabe que $N = \overset{\circ}{7}$. Luego:

$$N = 180k + 1 = \overset{\circ}{7}$$

Dando valore a $k \in \mathbb{N}$, el primero en cumplir es $k = 4$. Así:

$$N = 180(4) + 1 = 721$$

Por lo que, la suma de las cifras de N es 10.

MCM y MCD

Mínimo común múltiplo (MCM): El MCM de dos o más números naturales es el menor de todos sus múltiplos positivos comunes.

Máximo común divisor (MCD): El MCD de dos o más números naturales es el mayor de todos sus divisores positivos comunes.

Método de descomposición individual: Dado un conjunto de números expresados como descomposición canónica, el MCM es el producto de los factores primos comunes y no comunes elevados a sus mayores exponentes, y el MCD es el producto de sus factores primos comunes elevados a sus menores exponentes.

MCD mediante el algoritmo de Euclides:

Este método consiste en una secuencia de divisiones sucesivas, hasta que la división sea exacta, en esta última operación, el divisor será el MCD.

Procedimiento: Suponga que $A > B$. Para hallar $MCD(A,B)$ mediante el algoritmo de Euclides:

1°: Se divide A por B, obteniendo un cociente q_1 y un residuo r_1.

2°: Se divide B por r_1, obteniéndose un cociente q_2 y un residuo r_2.

3°: Se divide r_1 por r_2, obteniéndose un cociente q_3 y un residuo 3.

4°: Se repite este proceso hasta obtener una división exacta. En esta última división, el divisor será el $MCD(A,B)$.

Esquema:

	q_1	q_2	q_3	…	q_{n-1}	q_n
A	B	r_1	r_2	…	r_{n-2}	r_{n-1}
	r_1	r_2	r_3	…	r_{n-1}	0

$$MCD(A,B) = r_{n-1}$$

Propiedades del MCM y MCD:

Sean $A, B, C \in \mathbb{N}$ no nulos y $k \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$:

- Si A y B son PESI, entonces $MCD(A,B) = 1$.
- $MCD(kA, kB) = k\,MCD(A,B)$
- $MCM(kA, kB) = k\,MCM(A,B)$
- $MCD(A^n, B^n) = [MCD(A,B)]^n$
- $MCM(A^n, B^n) = [MCM(A,B)]^n$
- $MCM(A,B) \times MCD(A,B) = A \times B$
- $MCD(n^A - 1, n^B - 1) = n^{MCD(A,B)} - 1$
- $MCM(n^A + r, n^B + r) = n^{MCM(A,B)} + r, \ \ r \in \mathbb{Z}$
- $MCD(A,B,C) = MCD[MCD(A,B), MCD(B,C)]$
- $MCM(A,B,C) = MCM[MCM(A,B), MCM(B,C)]$
- Si A y B son PESI, con $A > B$:

$$MCD(A, A \pm B) = MCD(B, A \pm B) = 1$$

Teorema: Si $MCD(A,B) = d$, entonces existen $p, q \in \mathbb{Z}$ PESI tales que:

$$A = dp$$
$$B = dq$$

y además: $MCM(A,B) = dpq$

NÚMEROS RACIONALES

El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, se define por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} :\ a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0 \right\}$$

Con esta definición se tiene que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Esto indica que los elementos de $\mathbb{Q}$ no son todos, necesariamente, resultados de cocientes exactos.

NÚMEROS FRACCIONARIOS

A. Concepto de fracción: Es la representación de la cantidad tomada del número de partes en que se divide una cantidad total.

Esta representación indica que 5 partes han sido tomadas de un total de 8. Esto se indicará como:

$$f = \frac{5}{8} \begin{matrix} \longrightarrow \text{Numerador} \\ \longrightarrow \text{Denominador} \end{matrix}$$

B. Elementos de una fracción:

- **Denominador:** Es el número que nos indica el total de partes iguales en las que se ha dividido la unidad.
- **Numerador:** Es el número que nos indica las partes que se han tomado de la unidad.

Tipos de fracciones

Fracción racional: Son números racionales que no originan un número entero.

$$f = \frac{a}{b}, a \neq \mathring{b}$$

C. Fracción irreductible: Es aquella cuyos elementos son PESI.

Ejm.:

$$\frac{7}{8}, \frac{3}{1}, \frac{11}{2}, \ldots$$

D. Fracción equivalente: Una fracción es equivalente a otra cuando tienen distinta representación, pero un mismo valor.

Ejm.:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \ldots$$

CLASIFICACIÓN DE FRACCIONES

A. Por la comparación de sus elementos:

- **Fracción propia:** Es aquella cuyo valor es menor que la unidad. Es decir, su numerador es menor que su denominador.
- **Fracción impropia:** Es aquella cuyo valor es mayor que la unidad. Es decir, su numerador es mayor que su denominador. Estas tienen una representación mixta en la que la parte entera del cociente va junto a la fracción propia:

$$\frac{13}{8} = 1\frac{5}{3}$$

B. Por la naturaleza de su denominador:

- **Fracción ordinaria:** Es aquella cuyo denominador no es una potencia de 10.
- **Fracción decimal:** Es aquella cuyo denominador sí es una potencia de 10.

C. Por el grupo de fracciones:

- **Fracciones homogéneas:** Aquellas que poseen un mismo denominador.
- **Fracciones heterogéneas:** Aquellas que poseen diferente denominador.

OPERACIONES CON FRACCIONES

A. Adición y sustracción:

- **Caso homogéneo:** Se suman o restan los numeradores y se pone el mismo denominador.

Ejm.:

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{5} - \frac{4}{5} = \frac{2+3-4}{5} = \frac{1}{5}$$

- **Caso heterogéneo:** Se determina el MCM de los denominadores y se busca que cada término sea equivalente a una fracción con denominador igual al MCM. Luego se procede como el caso anterior.

Ejm.:

$$\frac{5}{24} + \frac{17}{40} - \frac{7}{15}$$

Como $MCM(24,40,15) = 120$, se homogeniza:

$$\frac{5 \times \mathbf{5}}{24 \times \mathbf{5}} + \frac{17 \times \mathbf{3}}{40 \times \mathbf{3}} - \frac{7 \times \mathbf{8}}{15 \times \mathbf{8}} = \frac{25}{120} + \frac{51}{120} - \frac{56}{120} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$

B. Multiplicación: Se multiplican los numeradores para formar un nuevo numerador y se multiplican los denominadores para formar un nuevo denominador.

Ejm.:

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{5 \times 7} = \frac{6}{35}$$

C. División: Se invierte la fracción que hace el papel de divisor y luego se multiplican las fracciones.

Ejm.:

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{7}} = \frac{3}{5} \times \frac{7}{2} = \frac{21}{10}$$

Puede interpretarse como un cociente de "extremos" entre "medios".

D. MCD: El MCD de varias fracciones irreductibles es la mayor fracción que divide exactamente a las otras.

$$MCD\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{MCD(a,c,e)}{MCM(b,d,f)}$$

E. MCM: El MCM de varias fracciones irreductibles es el menor número que divide exactamente a las otras.

$$MCM\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}\right) = \frac{MCM(a,c,e)}{MCD(b,d,f)}$$

Ejm.:

$$MCD\left(\frac{1}{5}, \frac{16}{9}, \frac{4}{7}\right) = \frac{MCD(1,16,4)}{MCM(5,9,7)} = \frac{4}{315}$$

NÚMEROS DECIMALES

Es la expresión en forma lineal de una fracción que consta de dos partes: una entera y otra decimal, ambas separadas por una coma.

Ejm.:

$3{,}4325$

Parte entera: 3 — Parte decimal: 4325

A. Decimal exacto: Tiene una cantidad finita de cifras en la parte decimal. Se origina cuando el denominador de la fracción irreductible presenta

potencias de 2, 5 o ambas. Su cantidad de cifras está dada por el mayor exponente de 2 o 5 contenido en su denominador.

Ejm.:

$$\frac{7}{400} = \frac{7}{2^4 \times 5^2} = 0{,}0175 \text{ (4 cifras de cimales)}$$

B. Decimal inexacto:

- **Periódico puro:** Tiene una cantidad infinita de cifras en la parte decimal que se repiten Se origina cuando el denominador de la fracción irreductible presenta potencias de factores primos diferentes de 2 y 5.

  La cantidad de cifras periódicas está dada por el menor número formado únicamente por cifras nueve que contiene exactamente al denominador de la fracción irreductible. Si el denominador de la fracción irreductible es el producto de varios factores primos diferentes, el número de cifras periódicas está dado por el MCM de la cantidad de cifras periódicas que cada factor primo indica.

  Ejm.:

  $$\frac{31}{11} = \frac{279}{99} = 2{,}8181 \ldots = 2{,}\widehat{81} (2\text{cifrasperiódicas})$$

Tabla de nueves

$$9 = 3^2$$
$$99 = 3^2 \times 11$$
$$999 = 3^3 \times 37$$
$$9999 = 3^2 \times 11 \times 101$$
$$99999 = 3^2 \times 41 \times 271$$
$$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$$
$$9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$$
$$99999999 = 3^2 \times 11 \times 101 \times 73 \times 137$$

Ejm.:

$$f = \frac{1}{11 \times 37} = 0.\widehat{002457}$$

11 está contenido en 99 (2 cifras periódicas)
37 está contenido en 999 (3 cifras periódicas)
Como $MCM(2,3) = 6$, f tiene seis cifras periódicas.

- **Periódico mixto:** Tiene una cantidad de cifras que no se repiten (cifras no periódicas) y otra cantidad infinita de cifras que se repiten indefinidamente de forma periódica (cifras periódicas). Las fracciones irreductibles que dan origen a estos números decimales poseen en el denominador productos de potencias de 2 o 5 y otros primos diferentes a 2 y 5. La cantidad de cifras periódicas y no periódicas se determinan mediante los casos anteriores.

  Ejm.:

  $$f = \frac{7}{2^3 \times 5 \times 41} = 0.00\widehat{426829}$$

3 es el mayor exponente de 2 (3 cifras no periódicas)
41 está contenido en 99999 (5 cifras periódicas)

NÚMEROS AVALES Y FRACCIÓN GENERATRIZ

Los números avales son aquellos que resultan de dividir los términos de una fracción en cualquier sistema de numeración. En este caso, tienen una parte entera y una parte "aval".

$$\overline{abc,def}_{(n)} = a \times n^2 + b \times n + c + \frac{d}{n} + \frac{e}{n^2} + \frac{f}{n^3}$$

División en otra base: Se debe multiplicar por la base de numeración al dividendo y a los cocientes obtenidos y proceder similarmente a la base 10.

Ejm.:

Dividir 17 entre 24 en base 6.

$$\begin{array}{r|l} 17 \times \mathbf{6} & 24 \\ \hline 96 & 0{,}413_{(6)} \\ \hline 6 \times \mathbf{6} & \\ 24 & \\ \hline 12 \times \mathbf{6} & \\ 72 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Las clasificaciones y la determinación de cifras de la parte aval es análoga a la realizada en base 10, teniendo en cuenta que las cifras no periódicas se harán usando los divisores primos de n y las periódicas los divisores diferentes a los divisores primos.

Fracción generatriz de un número decimal: Es la fracción que genera los números decimales exactos e inexactos.

1. Decimal exacto:

$$0, \overline{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{10000}$$

2. Periódico puro:

$$0, \widehat{abcd} = \frac{\overline{abcd}}{9999}$$

3. Periódico mixto:

$$0, \overline{ab}\widehat{cd} = \frac{\overline{abcd} - \overline{ab}}{9900}$$

Similarmente para números avales:

1. Aval exacto:

$$0, \overline{abcd}_{(n)} = \frac{\overline{abcd}_{(n)}}{10000_{(n)}}$$

2. Periódico puro:

$$0, \widehat{abcd}_{(n)} = \frac{\overline{abcd}}{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)(n-1)}_{(n)}}$$

3. Periódico mixto:

$$0, \overline{ab}\widehat{cd}_{(n)} = \frac{\overline{abcd}_{(n)} - \overline{ab}_{(n)}}{\overline{(n-1)(n-1)00}_{(n)}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar dos números PESI cuyo MCM sea 330 y su diferencia sea 7.

Solución

Consideremos A y B tal que $A - B = 7$. Como son PESI, su MCD es la unidad, por lo que $MCM(A, B) = 330$. Usando el teorema, existen p y q PESI tales que:

$$A = 1p, B = 1q$$

Con $A - B = p - q = 7$ y $330 = 1pq$, además, como $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11 = p \times q$, podemos concluir que $p = A = 22$ y $q = B = 15$.

2. Hallar la cantidad de rectángulos de área $360u^2$ que poseen lados enteros.

Solución:

Sean a, b los lados del rectángulo. Entonces:

$$a \times b = 360$$

que puede expresarse como:

$$a \times b = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

Por lo que:

$$CD(N) = (3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$$

Como debe considerarse que los productos pueden ser conmutados, el número total de rectángulos es:

$$\frac{24}{2} = 12$$

3. Sean a, b PESI. Si al calcular $MCD(\overline{aaaa}, \overline{bbbb})$ mediante el algoritmo de Euclides se tiene como cocientes por exceso $3, 2$ y 2, hallar $a - b \in \mathbb{N}$.

Solución:

Del enunciado, se deduce que $a \geq b$. Suponiendo que $MCD(\overline{aaaa}, \overline{bbbb}) = d$, se tiene:

	3	2	2
$\overline{aaaa}$	$\overline{bbbb}$	$2d$	d
	$2d$	d	0

Así:

$$\overline{bbbb} = 2 \times 2d - d \Longrightarrow \overline{bbbb} = 3d$$

$$\overline{aaaa} = 3 \times \overline{bbbb} - 2d \Longrightarrow \overline{aaaa} = 7d$$

Dividiendo la 2° ecuación entre la 1°:

$$\frac{a}{b} = \frac{7}{3}$$

Y como ambas son cifras, se deduce que $a = 7$ y $b = 3$, por lo que la diferencia pedida es $a - b = 4$.

4. Hallar la cantidad de cifras no periódicas de la siguiente fracción:

$$f = \frac{800}{31! - 21!}$$

Solución:

Haciendo la descomposición:

$$800 = 2^5 \times 5^2$$

Y en el denominador:

$$31! - 21! = 21!\underbrace{(22 \times 23 \ldots \times 31 - 1)}_{A}$$

$$= 2^{18} \times 5^4 \times A$$

Luego, en la fracción:

$$f = \frac{2^5 \times 5^2}{2^{18} \times 5^4 \times A} = \frac{1}{2^{13} \times 5^2 \times A}$$

Observando el mayor exponente de 2 y 5, se deduce que la parte no periódica tiene 13 cifras.

5. Hallar el valor de a si se cumple:

$$\frac{\overline{2a}}{55} = 0, a363636 \ldots$$

Solución:

Como hay una cifra no periódica, se tiene:

$$\frac{\overline{2a}}{55} = \frac{\overline{a36} - a}{990}$$

Luego:

$$990(20 + a) = 55(99a + 36)$$
$$18(20 + a) = 9(11a + 4)$$
$$40 + 2a = 11a + 4$$
$$36 = 9a$$
$$a = 4$$

MAGNITUDES PROPORCIONALES

La proporcionalidad estudia el comportamiento de elementos relacionados entre sí bajo un criterio de dependencia entre ambos. Por ejemplo, para ir de un lado a otro, si se va más rápido, se utiliza menos tiempo, pero si se duplica esta distancia, con esa misma velocidad se necesitará más tiempo.

A. Conceptos previos:

1. **Magnitud:** Es todo aquello que tiene la propiedad de cambiar, es decir, susceptible a variaciones y que puede ser medido o cuantificado.
2. **Cantidad:** Es el valor de un estado particular de la magnitud y posee dos partes, valor numérico y unidad.

   Ejm.:

Magnitud	Cantidad
Temperatura	$32\ °C$
Longitud	$12\ \text{m}$
Número de obreros	43 obreros
Cantidad de obra	$1/2$ de obra
Área	$50\ \text{m}^2$

B. Clasificación:

1. **Magnitudes directamente proporcionales:** Dos magnitudes son directamente proporcionales (DP) cuando al aumentar una de ellas en cierta proporción, también la otra aumenta en esa misma proporción, y similarmente, si al disminuir una en cierta proporción, la otra también disminuye en esa misma proporción.

   Ejm.:
   - Tiempo DP Distancia
   - Dificultad DP Eficiencia
   - #Obreros DP Cantidad de obra

   Notación: Hay dos notaciones.

   $$A\ DP\ B$$
   $$A\ \alpha\ B$$

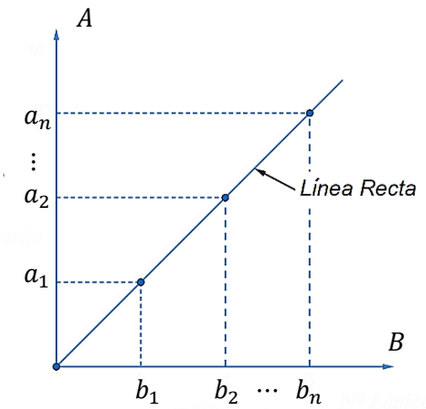
   ➢ **Representación tabular:** Cuando las dos magnitudes A y B se representan en una tabla tomando los valores:

$\boldsymbol{A}$	a_1	a_2	…	a_n
$\boldsymbol{B}$	b_1	b_2	…	b_n

   Son DP cuando existe una constante $k \in \mathbb{N}$:

   $$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

   ➢ **Representación gráfica:** A partir de los datos de la tabla anterior, en el plano cartesiano se tiene una recta que parte desde el origen.



2. **Magnitudes inversamente proporcionales:** Dos magnitudes son inversamente proporcionales (IP) cuando al aumentar una de ellas en cierta proporción, la otra disminuye en esa misma proporción, y similarmente, si al disminuir una en cierta proporción, la otra aumenta en esa misma proporción.

   Ejm.:
   - Rapidez IP Tiempo
   - Eficiencia IP #Horas diarias
   - #Obreros IP #Días

   Notación: Hay dos notaciones.

   $$A\ IP\ B$$
   $$A\ 1/\alpha\ B$$

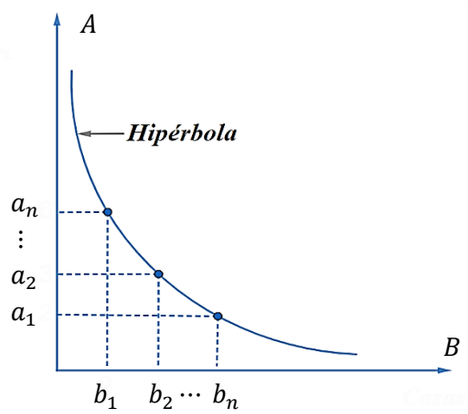
   ➢ **Representación tabular:** Cuando las dos magnitudes A y B se representan en una tabla tomando los valores:

$\boldsymbol{A}$	a_1	a_2	…	a_n
$\boldsymbol{B}$	b_1	b_2	…	b_n

   Son IP cuando existe una constante $k \in \mathbb{N}$:

   $$a_1 \times b_1 = a_2 \times b_2 = \cdots = a_n \times b_n = k$$

   ➢ **Representación gráfica:** A partir de los datos de la tabla anterior, en el plano cartesiano se tiene una rama de hipérbola equilátera.



Propiedades: Dadas las magnitudes A, B, C y D:

1. $A\ DP\ B \Longrightarrow B\ DP\ A$
2. $A\ DP\ B \Longrightarrow A\ IP\ 1/B$
3. $A\ IP\ B \Longrightarrow B\ IP\ A$
4. $A\ IP\ B \Longrightarrow A\ DP\ 1/B$
5. $A\ DP\ B \Longrightarrow A^r\ DP\ B^r, \forall r \in \mathbb{R}$
6. $A\ IP\ B \Longrightarrow A^r\ IP\ B^r, \forall r \in \mathbb{R}$
7. Si se dan las relaciones:
   $A\ DP\ B$, siendo C, D, E constantes,
   $A\ IP\ C$, siendo B, D, E constantes,
   $A\ DP\ D$, siendo B, C, E constantes,
   $A\ IP\ E$, siendo B, C, D constantes,
   entonces existe una constante $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{A \times C \times E}{B \times D} = k$$

REPARTO PROPORCIONAL

El reparto proporcional consiste en distribuir una cantidad en partes proporcionales a ciertos valores numéricos llamados índices de reparto, ya sea directa o inversamente proporcional.

A. Reparto simple directo: Cuando las partes repartidas son DP a un grupo de índices de reparto.

Método de solución:

1. Formar las partes multiplicando cada índice por una constante k.
2. Sumar las partes para calcular el total.
3. Hallar la constante k igualando la suma de las partes con la cantidad total a repartir.
4. Obtener cada parte multiplicando cada índice de reparto por la constante k.

Esquema práctico:
Para repartir $N\ DP$ a los índices $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$:

$$N \begin{cases} \text{Partes} \\ a_1 k \\ a_2 k \\ a_3 k \\ \vdots \\ a_n k \end{cases} \Longrightarrow N = a_1 k + a_2 k + a_3 k + \cdots + a_n k$$

Luego:

$$k = \frac{N}{(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n)}$$

Finalmente, las partes serían:

$$P_1 = a_1 k,\ P_2 = a_2 k,\ P_3 = a_3 k, \cdots,\ P_n = a_n k$$

Propiedad: Si a los índices de reparto se les divide o multiplica por un mismo número positivo, el reparto no varía, es decir, se obtienen las mismas partes.

B. Reparto simple inverso: Cuando las partes repartidas son IP a un grupo de índices de reparto.

Método de solución: Por la propiedad 4, repartir una cantidad en forma inversamente proporcional a un grupo de índices, es suficiente repartirlos directamente proporcional a los inversos de estos índices.

Ejm.: Repartir 390 en tres partes que sean inversamente proporcionales a 6, 9 y 12.

$$390 \begin{cases} \text{Partes} \\ \frac{1}{6}k <> MCM(6,9,12)\frac{1}{6}k = 6k \\ \frac{1}{9}k <> MCM(6,9,12)\frac{1}{9}k = 4k \\ \frac{1}{12}k <> MCM(6,9,12)\frac{1}{12}k = 3k \end{cases}$$

Luego $13k = 390 \Longrightarrow k = 30$. Por lo que las partes serán:

$$P_1 = 6(30) = 180$$
$$P_2 = 4(30) = 120$$
$$P_3 = 3(30) = 90$$

C. Reparto compuesto simple: Cuando las partes repartidas son DP a dos grupos de índices. Para la solución, se multiplican los índices asociados a cada parte y se obtiene un único grupo de índices de reparto DP en el cual se aplica lo visto en el ítem **A**.

D. Reparto compuesto inverso: Cuando las partes repartidas son IP a dos grupos de índices. Para la solución, se multiplican los índices asociados a cada parte y se obtiene un único grupo de índices de reparto IP en el cual se aplica lo visto en el ítem **B**.

E. Reparto compuesto mixto: Cuando las partes repartidas son DP a un grupo de índices y a la vez IP a otro grupo de índices.

Método de solución:

1. Usando el método anterior, el grupo de índices de reparto IP se convierte a una relación DP.
2. Se multiplican los índices de reparto que ahora son ambos DP.
3. Se resuelve como un reparto simple directo para estos nuevos índices del paso anterior.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se quiere repartir la ganancia de una venta, que fue de $S/.6670$, entre quienes pusieron parte del capital, en cantidades que son como a $6, 8$ y 9. ¿Cuánto recibe el más favorecido?

Solución:

Por el esquema de solución, se tiene que usar los índices de reparto de forma directamente proporcional:

$$N \begin{cases} 6k \\ 8k \\ 9k \end{cases}^{\text{Partes}} \implies N = 23k$$

Por dato:

$$\begin{aligned} 23k &= 6670 \\ k &= 6670/23 \\ k &= 290 \end{aligned}$$

La mayor parte es:

$$9(k) = 2610$$

Por lo que el más favorecido recibe $S/.2610$.

2. Si $A\ DP\ B^4$, y cuando $A = 18$ se sabe que $B = 9$. Calcular el valor de B cuando $A = 288$.

Solución:

Por el dato inicial se sabe que:

$$\frac{A}{B^4} = ctte.$$

Reemplazando los valores que se nos da:

$$\frac{18}{9^4} = \frac{288}{B^4}$$

entonces:

$$B^4 = \frac{288 \times 9^4}{18} = \frac{144 \times (2 \times 9) \times 9^3}{18} = 144 \times 9^3$$

Luego, descomponiendo sus factores:

$$B^4 = 2^4 \times 3^2 \times 3^6 = 2^4 \times 3^8 = (2 \times 3^2)^4$$

Por lo que $B = 18$.

3. El peso de un disco es DP al cuadrado de su radio y su espesor. Se tienen dos discos cuyos pesos están en relación de 2 a 3, cuyos radios están en relación de 4 a 3, respectivamente. Si el espesor del primero es $3\ cm$, hallar el espesor del segundo.

Solución:

De los datos:

$$Peso\ DP\ (Radio)^2 \ \wedge \ Peso\ DP\ Espesor$$

Usando el método del reparto compuesto simple:

$$Peso\ DP\ (Radio)^2 \times Espesor$$

Por lo que:

$$\frac{Peso}{(Radio)^2 \times Espesor} = ctte.$$

Reemplazando los datos, para constantes P, R, E:

	Primer disco	Segundo disco
Peso	$2P$	$3P$
Radio	$4R$	$3R$
Espesor (cm)	3	E

Entonces:

$$\frac{2P}{(4R)^2 \times 3} = \frac{3P}{(3R)^2 \times E} \implies \frac{2}{16 \times 3} = \frac{3}{9 \times E}$$

Despejando:

$$E = \frac{3(16 \times 3)}{2 \times 9} = 8$$

Es decir, el espesor del segundo es de $8\ cm$

4. El producto de la suma de la mayor y menor parte, por la parte intermedia del reparto de N directamente proporcional a $3, 5$ y 7, es 45000. Hallar N.

Solución:

Por el esquema de solución, se tiene que:

$$N \begin{cases} 3k \\ 5k \\ 7k \end{cases}^{\text{Partes}} \implies N = 15k$$

Y por dato:

$$\begin{aligned} (7k + 3k)5k &= 45000 \\ 50k^2 &= 45000 \\ k^2 &= 900 \\ k &= 30 \end{aligned}$$

Reemplazando en la expresión de N, se tiene $N = 450$.

5. Dada la siguiente tabla de magnitudes A y B:

A	2	6	10	12	30
B	x	18	y	72	450

Hallar $\sqrt{x/y}$.

Solución:

Observando la tabla, no parece haber una relación DP o IP. Elevando al cuadrado los valores de A, se tiene:

$$\frac{6^2}{18} = \frac{12^2}{72} = \frac{30^2}{450} = 2\ (ctte.)$$

Por lo que se concluye que $A^2\ DP\ B$. Así:

$$\frac{2^2}{x} = \frac{10^2}{y} = 2 \implies x = 2, y = 50.$$

Finalmente:

$$\sqrt{x/y} = \sqrt{2/50} = \sqrt{1/25} = 1/5$$

"UNIVERSIDAD NACIONAL "JORGE BASADRE GROHMANN"
CENTRO PREUNIVERSITARIO
TEMA: Expresiones algebraicas, leyes de exponentes y polinomios

CEPU CICLO III-2023

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Monomio: Es la expresión algebraica que consta de un solo término, en el cual los exponentes de sus variables son cantidades enteras no negativas.

Ejm.:

a) $M(x,y) = x^5y^2$

b) $R(x,y,z) = -2x^{13}y^4z^2$

- **Grado absoluto ($G.A.$):** Está determinado por la suma de los exponentes de sus variables.

- **Grado Relativo ($G.R.$):** Con respecto a una de sus variables, está determinado por el exponente que tiene dicha variable.

  Ejm.:

  $$M(x,y,z) = 5x^6y^3z^2$$

  Tiene: $GR(x) = 6, GR(y) = 3, GR(z) = 2$

POLINOMIOS

Polinomio: Es la expresión algebraica que consta de dos o más términos, siendo cada uno un monomio.

- **Grado absoluto ($G.A.$):** Está determinado por el mayor grado absoluto que poseen sus términos.

- **Grado Relativo ($G.R.$):** Con respecto a una de sus variables, es el mayor exponente que tiene dicha variable.

  Ejm.:

  $$P(x,y) = x^3y^2 - 2x^5y^4 + x^2y^6$$

  Tiene: $G.A. = 9, GR(x) = 5, GR(y) = 6$

- **Polinomio ordenado:** Respecto a una variable llamada ordenatriz, cuando los exponentes en sus términos aumentan o disminuyen de izquierda a derecha.

- **Polinomio completo:** Respecto a una variable llamada ordenatriz, si cuenta con todos los exponentes menores que su grado relativo (incluyendo el grado cero).

  Propiedad: El número de términos de un polinomio completo es una unidad más que el grado absoluto del polinomio.

- **Polinomio homogéneo:** Cuando sus términos tienen el mismo grado absoluto.

  Ejm.:

  $$P(x,y) = x^5 + 2x^4y - x^3y^2 + x^2y^3 + xy^4 - y^5$$

  Es homogéneo, completo y ordenado en x y y.

- **Polinomios idénticos:** Cuando los coeficientes de sus términos semejantes son iguales.

- **Polinomio idénticamente nulo:** Aquel que tiene cada coeficiente igual a cero.

- **Valor numérico de una expresión algebraica:** Es el valor obtenido al realizar las operaciones indicadas en la expresión cuando se da un valor específico a las variables.

  Propiedad: Dado un polinomio $p(x)$, la suma de los coeficientes y el término independiente son dados por:

  $$\sum_{coef} p(x) = p(1)$$

  $$T.I. = p(0)$$

LEYES DE EXPONENTES

Es el conjunto de leyes que relacionan los exponentes de las expresiones algebraicas.

Propiedades:

1. Producto de bases iguales:

   $$m,n \in \mathbb{R}: \ x^m x^n = x^{m+n}$$

2. Exponente de un producto:

   $$m \in \mathbb{R}: \ (xy)^m = x^m y^m$$

3. Potencia de potencia:

   $$m,n \in \mathbb{R}: \ (x^m)^n = x^{mn}$$

4. Exponente nulo:

   $$x^0 = 1, \quad x \neq 0$$

5. Exponente negativo:

   $$m \in \mathbb{R}: \ x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$$

6. Cociente de bases iguales:

   $$m,n \in \mathbb{R}: \ \frac{x^m}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^{m-n}, \quad y \neq 0$$

7. Exponente de un cociente:

   $$m \in \mathbb{R}: \ \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}, \quad y \neq 0$$

8. Exponente negativo de un cociente:

$$m \in \mathbb{R}: \ \left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^{m}, \quad x, y \neq 0$$

9. Raíz de una potencia:

$$m, n \in \mathbb{R}: \ \sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}, \quad n \neq 0$$

10. Producto de radicales homogéneos:

$$n \in \mathbb{R}: \ \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}, \quad n \neq 0$$

11. Cociente de radicales homogéneos:

$$n \in \mathbb{R}: \ \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}, \quad n, y \neq 0$$

12. Potencia de un radical:

$$m, n \in \mathbb{R}: \ \left(\sqrt[n]{x^m}\right)^p = \sqrt[n]{x^{mp}}, \quad n \neq 0$$

13. Radical de un radical:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}, \quad n, m \neq 0$$

ECUACIONES EXPONENCIALES

Son ecuaciones que presentan a la incógnita como parte de algún exponente.

Métodos de solución:

1. Por igualdad de bases:

$$|x| \neq 0, 1: \ x^m = x^n \Rightarrow m = n$$

2. Por igualdad de exponentes:

$$m \neq 0: \ x^m = y^m \Rightarrow |x| = |y|$$

3. Por igualdad de base y exponente:

$$x, y \neq 0: \ x^x = y^y \Rightarrow x = y$$

4. Por analogía de términos: Consiste en dar forma a los miembros de la igualdad de modo que en ambos se presente una estructura similar y así poder comparar términos.
   Ejm.:

$$x^{x^3} = 3$$

Como $3 = \sqrt[3]{3}^3$, transformando se tiene:

$$x^{x^3} = \sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}^3}$$

Haciendo la comparación: $x = \sqrt[3]{3}$.

NOTA: La analogía de términos no siempre nos da todas las soluciones. Por ejemplo, si $\sqrt[x]{x} = \sqrt[2]{2}$, la analogía infiere que $x = 2$. Sin embargo, $x = 4$ es otra solución.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar $p(3)$ si el polinomio $p(x)$ satisface:

$$\begin{cases} p(2x-1) = p(2x) + p(1) \\ p(0) = 2 \end{cases}$$

Solución:

Damos el valor numérico $x = 1/2$ y usamos los datos:

$$p\left(2\frac{1}{2} - 1\right) = p\left(2\frac{1}{2}\right) + p(1)$$
$$p(0) = p(1) + p(1)$$
$$2 = 2p(1)$$
$$p(1) = 1$$

Damos el valor numérico $x = 1$ y usamos los datos:

$$p(2.1 - 1) = p(2.1) + p(1)$$
$$p(1) = p(2) + 1$$
$$1 = p(2) + 1$$
$$p(2) = 0$$

Damos el valor numérico $x = 3/2$ y usamos los datos:

$$p\left(2\frac{3}{2} - 1\right) = p\left(2\frac{3}{2}\right) + p(1)$$
$$p(2) = p(3) + p(1)$$
$$0 = p(3) + 1$$

De aquí se concluye:

$$p(3) = -1$$

2. Hallar n si el término independiente excede en 14 a la suma de coeficientes del polinomio:

$$p(x-2) = (3nx - 8n)^2 + (x-2)^{2n} + 12x - 24$$

Solución:

Usando el dato:

$$T.I. - \sum_{coef} p(x) = 14$$
$$p(0) - p(1) = 14$$

Usando el valor numérico $x = 2$:

$$p(0) = (6n - 8n)^2 + 12(2) - 24$$
$$p(0) = 4n^2$$

Usando el valor numérico $x = 3$:

$$p(1) = (9n - 8n)^2 + 1^{2n} + 12(3) - 24$$
$$p(1) = n^2 + 13$$

Reemplazando en el dato:

$$4n^2 - (n^2 + 13) = 14$$
$$3n^2 - 13 = 14$$
$$3n^2 = 27$$
$$n^2 = 9$$

Y como $2n$ es grado polinomial, no puede ser negativo, por lo que $n = 3$.

"UNIVERSIDAD NACIONAL "JORGE BASADRE GROHMANN"
CENTRO PREUNIVERSITARIO
TEMA: Operaciones con expresiones algebraicas: Productos y cocientes notables - Factorización

CEPU CICLO III-2023

PRODUCTOS NOTABLES

1. Binomio al cuadrado

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Propiedad: El trinomio $ax^2 + bx + c$ es perfecto si, y solo si $b^2 - 4ac = 0$.

2. Identidades de Legendre

- $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$
- $(a+b)^3 + (a-b)^3 = 2a(a^2 + 3b^2)$
- $(a+b)^3 - (a-b)^3 = 2b(b^2 + 3a^2)$
- $(a+b)^4 - (a-b)^4 = 8ab(a^2 + b^2)$

3. Diferencia de cuadrados

- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

En general, para $n \in \mathbb{N}$:

$$(a^n + b^n)(a^n - b^n) = a^{2n} - b^{2n}$$

4. Suma y diferencia de cubos

- $(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$
- $(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

5. Binomio al cubo

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

6. Identidades de Cauchy

- $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- $(a-b)^3 = a^3 + b^3 - 3ab(a-b)$

7. Trinomio al cuadrado

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

8. Trinomio al cubo

$$(a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b)(b+c)(a+c)$$
$$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a+b+c)(ab + bc + ac) - 3abc$$

9. Identidad de Lagrange

$$(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

10. Identidades de Stevin

- $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc$

11. Identidades de Argan'd

- $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) = x^4 + x^2 + 1$
- $(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) = x^4 + x^2y^2 + y^4$

En general, para $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(x^{2m} + x^m y^n + y^{2n})(x^{2m} - x^m y^n + y^{2n}) = x^{4m} + x^{2m}y^{2n} + y^{4n}$$

12. Identidades de Gauss

- $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
- $(a+b+c)(ab + bc + ac) = (a+b)(b+c)(a+c) + abc$

13. Igualdades condicionales

Si $a + b + c = 0$, se verifica:

- $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ac)$
- $(a^2 + b^2 + c^2)^2 = 2(a^4 + b^4 + c^4)$
- $(ab + bc + ac)^2 = (ab)^2 + (bc)^2 + (ac)^2$
- $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
- $a^4 + b^4 + c^4 = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$
- $a^5 + b^5 + c^5 = -5abc(ab + bc + ac)$
- $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\right) = \left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right)$
- $\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\right) = \left(\frac{a^7+b^7+c^7}{7}\right)$

DIVISIÓN POLINÓMICA

Algoritmo de la división

Dados dos polinomios $D(x), d(x)$ no constantes, existen dos únicos polinomios $q(x), r(x)$ tales que:

$$D(x) = d(x)q(x) + r(x)$$

donde $0 \leq GA[r(x)] < GA[d(x)]$, denominados:

- $D(x)$: Dividendo
- $d(x)$: Divisor
- $q(x)$: Cociente
- $r(x)$: Residuo

Propiedades

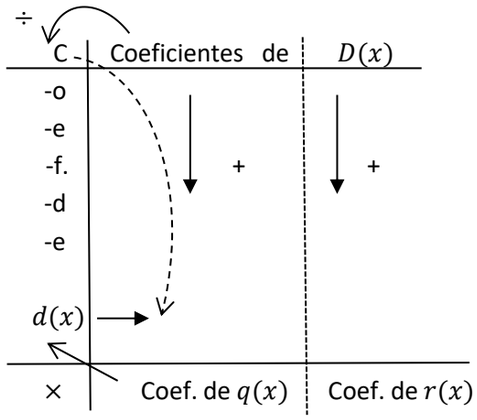
- $GA[q(x)] = GA[D(x)] - GA[d(x)]$
- $máx\{GA[r(x)]\} = GA[d(x)] - 1$
- Si $GA[r(x)] = 0$, la división es exacta.

Métodos de división

Considerar el dividendo y el divisor ordenados decrecientemente y completos.

A. Método de Horner

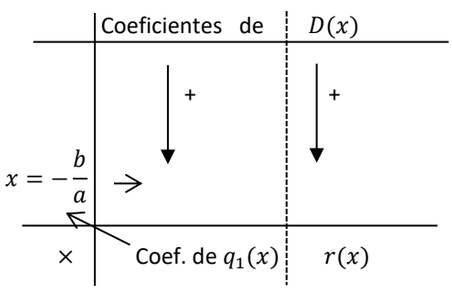
1. Se distribuyen en forma horizontal los coeficientes del dividendo, y en forma vertical los coeficientes del divisor, todos cambiados de signos a excepción del primero.
2. Se divide el primer coeficiente del dividendo por el primero del divisor, obteniendo el primero del cociente. Luego este se multiplica por cada uno de los coeficientes del divisor que han cambiado de signo, y los resultados se colocan dejando una columna de lado.
3. Se reduce la siguiente columna y se repite el paso anterior tantas veces hasta que la última operación efectuada caiga debajo del último coeficiente del dividendo. Llegado este momento se reduce las columnas que falten; separando los coeficientes del cociente y el resto respectivamente.



A la derecha de la línea divisoria, el número de columnas es igual al $GA[d(x)]$.

B. Regla de Ruffini

Es recomendado para divisores es de primer grado o transformable a esta forma. El esquema para el divisor de la forma $ax + b = 0$, es:



El cociente final se determina por $q(x) = aq_1(x)$.

D. Teorema del resto

Dado el polinomio $p(x)$ no constante, el resto de dividir $p(x)$ entre $ax + b$ es dado por $p(-b/a)$.

NOTA: Hay casos en que el Teorema del resto se aplica tras hacer un cambio de variable $z = mx + n$, con eso $D(x) = D(z)$, $d(x) = d(z) = az^n + b$ y puede obtenerse el resto usando el teorema.

COCIENTES NOTABLES

Son casos especiales de división exacta entre divisores binómicos, son de la forma:

$$\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y} \ , n \in \mathbb{N}$$

Caso I: n par o impar

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Caso II: n impar

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots - xy^{n-2} + y^{n-1}$$

Caso III: n par

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots + xy^{n-2} - y^{n-1}$$

Caso IV: n par o impar

$$\frac{x^n + y^n}{x - y} = \text{"no es un cociente notable"}$$

Propiedades:

- El desarrollo del cociente notable tiene n términos.
- El grado absoluto del cociente es $n - 1$ y es homogéneo.
- Si el divisor es $x - y$, todos los términos tienen signos positivos, mientras que si el divisor es $x + y$, los términos tienen signos alternados.
- Los exponentes de la 1^{ra} variable disminuyen de uno en uno y los exponentes de la 2^{da} variable aumentan de uno en uno.

Término general

Si $\frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$ es un cociente notable, el término que ocupa el lugar k en su desarrollo es:

$$t_k = (signo)x^{n-k}y^{k-1}$$

Donde el signo se coloca de acuerdo con el caso que corresponda.

Observación:

Se tienen variantes en las que $\frac{x^n \pm y^m}{x^a \pm y^b}$ genera un cociente notable, siendo la condición suficiente y necesaria:

$$\frac{n}{a} = \frac{m}{b} = r = \text{"\# de términos"}$$

FACTORIZACIÓN

Factor algebraico

Se dice que el factor no constante $h(x)$ es un factor algebraico de $p(x)$, si existe un polinomio $q(x)$ tal que $p(x) = h(x)q(x)$. Es decir, $h(x)$ es un factor algebraico de $p(x)$ si la división entre $h(x)$ es exacta.

Ejm.:

$p(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$
tiene como factores a:

- $(x+1), (x+2), (x+3)$
- $(x+1)\ (x+2), (x+1)(x+3), (x+2)(x+3)$
- $(x+1), (x+2), (x+3)$

Propiedad: Si $p(x) = (x+a)^m(x+b)^n$, el número de sus factores algebraicos es $(m+1)(n+1)$.

Polinomio reductible

Se dice que el polinomio no constante $p(x)$ es reductible si se puede descomponer como producto de dos o más polinomios de grados menores que su grado absoluto. Tales factores son llamados *factores primos* de $p(x)$ y si tienen coeficientes en $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$, se dirá que la descomposición es en $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$, respectivamente.

Polinomio irreductible

Se dice que el polinomio no constante $p(x)$ es irreductible si la única descomposición en factores algebraicos que admite tiene a un factor constante.

Factorización

Es la transformación de un polinomio en un producto de factores irreductibles.

Métodos de factorización

1. **Factor común**

   Se aplica cuando todos los términos poseen un factor que les es común. Consiste en escribir los términos antes de haberse aplicado la distributividad de este factor.

   Ejm.:

   $$a^2x + 2ax^2 - ax \ \Rightarrow\ ax(a + 2x - 1)$$

2. **Agrupación de términos**

   Se aplica cuando los términos pueden ser agrupados por conmutatividad y asociatividad de tal forma que sea posible reconocer factores polinomiales comunes.

3. **Identidades**

   Se aplica cuando se presenta el desarrollo de un producto notable, el método consiste en reconocer de qué identidad proviene y emplearla en sentido inverso.

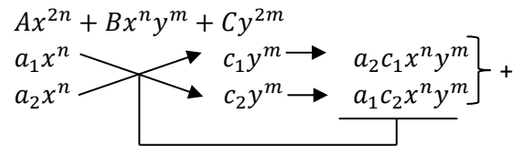
4. **Aspa simple**

   Se aplica en la factorización de polinomios de la siguiente forma:

   $$p(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m}$$

   Procedimiento:

   1. Descomponer los extremos convenientemente:

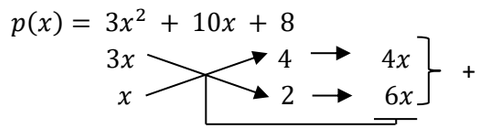
   2. Se comprueba que el término central es igual a la suma de los productos parciales en forma de aspa:

   $$B = a_2c_1 + a_1c_2$$

   3. Finalmente, la factorización del polinomio es:

   $$p(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m)(a_2x^n + c_2y^m)$$

   Ejm.:

   Así:

   $$p(x) = (3x+4)(x+2)$$

5. **Aspa doble**

   Se aplica en la factorización de polinomios de la siguiente forma:

   $$p(x,y) = Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m} + Dx^n + Ey^m + F$$

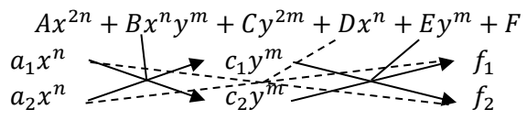
   Procedimiento:

   1. Reordenar el polinomio de acuerdo con la forma general presentada anteriormente.
   2. De faltar algún término, se coloca con el coeficiente cero.
   3. Se aplican las aspas simples a:

   - $Ax^{2n} + Bx^n y^m + Cy^{2m}$

- $Cy^{2m} + Ey^m + F$
- $Ax^{2n} + Dx^n + F$

El esquema es el siguiente:



4. Finalmente, la factorización del polinomio es:

$$p(x,y) = (a_1x^n + c_1y^m + f_1)(a_2x^n + c_2y^m + f_2)$$

6. Aspa doble especial

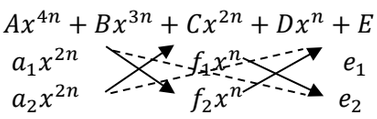
Se aplica en la factorización de polinomios de la siguiente forma:

$$p(x) = Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n} + Dx^n + E$$

Procedimiento:

1. Reordenar el polinomio de acuerdo con la forma general presentada anteriormente.
2. De faltar algún término, se coloca con el coeficiente cero.
3. Se descomponen los extremos de tal manera que la suma de las multiplicaciones en aspa sea igual o aproximada al término central.
4. La cantidad faltante se descompone en dos factores que permiten aplicar aspa simple en $Ax^{4n} + Bx^{3n} + Cx^{2n}$ y en $Cx^{2n} + Dx^n + E$.

El esquema es el siguiente:



Se tiene: $(a_1e_2 + a_2e_1)x^{2n}$

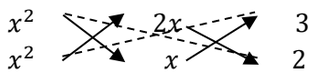
Falta: $(C - a_1e_2 - a_2e_1)x^{2n} = Fx^{2n} = (f_1x^n)(f_2x^n)$

5. Finalmente, la factorización del polinomio es:

$$p(x) = (a_1x^{2n} + f_1x^n + e_1)(a_2x^{2n} + f_2x^n + e_2)$$

Ejm.:

$$p(x) = x^4 + 3x^3 + 7x^2 + 7x + 6$$



Se tiene: $5x^2$

Falta: $7x^2 - 5x^2 = 2x^2 = (2x)(x)$

Así:

$$p(x) = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + x + 2)$$

7. Divisores binómicos

Raíz de un polinomio

Si $p(x)$ es un polinomio de grado absoluto $n \geq 1$, se dice que a es raíz de $p(x)$ si $p(a) = 0$.

Posibles raíces racionales

Si $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ es un polinomio de coeficientes enteros, con $a_0 \neq 0$, entonces, las posibles raíces racionales son:

$$a \in \left\{\pm \frac{divisores\ de\ |a_n|}{divisores\ de\ |a_0|}\right\}$$

Teorema del factor

Si $p(x)$ es un polinomio de grado absoluto $n \geq 1$, entonces, $p(a) = 0$ si y solo si $(x - a)$ es un factor de $p(x)$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si se sabe que:

$$\begin{cases} p - q - r = 2 \\ pq + pr = qr \end{cases}$$

hallar el valor de:

$$T = p^2 + q^2 + r^2$$

Solución:

Elevando a cuadrado la primera ecuación:

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr + 2qr = 4$$
$$p^2 + q^2 + r^2 - 2(pq + pr - qr) = 4$$

Reemplazando la segunda ecuación:

$$p^2 + q^2 + r^2 - 2(0) = 4$$

Entonces:

$$T = 4$$

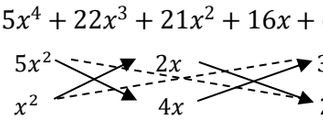
2. Factorizar el siguiente polinomio:

$$p(x) = 5x^4 + 22x^3 + 21x^2 + 16x + 6$$

Solución:

Haciendo uso del aspa doble, se tiene:

$$p(x) = 5x^4 + 22x^3 + 21x^2 + 16x + 6$$



Se tiene $10x^2 + 3x^2 = 13x^2$

Para llegar a $21x^2$ falta $8x^2 = (2x)(4x)$. Así:

$$p(x) = (5x^2 + 2x + 3)(x^2 + 4x + 2)$$

3. Si $a - b = \sqrt{5}$ y $ab = 3$. Hallar $(a + b)^2$.

Solución:

Haciendo uso de la identidad de Legendre:

$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Reemplazando los datos:

$$(a + b)^2 - 5 = 4(3) \Rightarrow (a + b)^2 = 17$$

FRACCIONES ALGEBRAICAS

Son cocientes de dos expresiones algebraicas donde el divisor es diferente de cero. Se clasifican como:

- **Fracción propia:** Aquella en que el grado del numerador es menor que el grado del denominador.
- **Fracción impropia:** Aquella en que el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador.
- **Fracciones homogéneas:** Aquellas que tienen el mismo denominador.
- **Fracciones Heterogéneas:** Aquellas que tienen distinto denominador.
- **Fracciones Equivalentes:** Aquellas que tienen el mismo valor numérico para mismos valores admisibles de sus variables.
- **Fracciones irreductibles:** Aquellas cuyas factorizaciones, del numerador y denominador no tienen términos comunes.
- **Fracciones compuestas:** Aquellas que tienen una o más fracciones en el numerador o denominador.

Fracciones parciales

Es un método de descomposición que permite expresar una fracción propia como suma de dos fracciones irreductibles.

A. Caso I: Denominador $(ax \pm b), a \neq 0$

Si el denominador presenta factores no repetidos de la forma $(ax \pm b)$, cada uno se corresponde con un sumando de la forma $\frac{N_1}{ax \pm b}$.

B. Caso II: Denominador $(ax \pm b)^n, a \neq 0$

Si el denominador presenta factores repetidos de la forma $(ax + b)^n$, cada uno se corresponde con tantos sumandos como veces que se repite. Es decir:

$$\frac{N}{(ax \pm b)^n} = \frac{N_1}{(a_1 x \pm b_{1)}} + \frac{N_2}{(a_2 x \pm b_2)^2} + \cdots + \frac{N_n}{(a_n x \pm b_n)^n}$$

Los coeficientes $N_1, \cdots, N_n$ se hallan al desarrollar la suma de la derecha e igualar numeradores mediante una ecuación polinómica que da valores particulares a la variable x.

ECUACIONES

Son igualdades relativas a dos expresiones algebraicas que adquieren el mismo valor para los mismos valores de sus incógnitas.

A. Conjunto solución

Es el conjunto formado por las soluciones de la ecuación.

B. Clases de ecuaciones

- **Ecuación compatible:** Es aquella cuyo conjunto solución tiene por lo menos un elemento. Esta a su vez, puede ser:
  - **Compatible determinada:** Aquella en la que se pueden enumerar los elementos del conjunto solución.
  - **Compatible indeterminada:** Aquella en la que no se pueden enumerar los elementos del conjunto solución.
- **Ecuación incompatible:** También llamada inconsistente, es aquella cuyo conjunto solución es el conjunto vacío.
- **Ecuaciones equivalentes:** Son aquellas que poseen el mismo conjunto solución.

Observación: Al resolver una ecuación usando las reglas del álgebra, se debe tener cuidado al multiplicar o dividir los miembros de la igualdad por factores que contienen a la incógnita, incluso, al elevar los miembros a un exponente, porque esto puede agregar soluciones "extrañas" o quitar soluciones admisibles. Por este motivo, siempre hay que verificar si, al hacer estos pasos, las soluciones verifican la ecuación original.

C. Ecuaciones de primer grado

Forma general:

$$ax + b = 0$$

Casos:

- $a \neq 0$: compatible con solución $x = -b/a$.
- $a = 0, b = 0$: es compatible indeterminada.
- $a = 0, b \neq 0$: es incompatible.

D. Ecuaciones de segundo grado

Forma general:

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$$

Definiendo la discriminante de la ecuación como:

$$\triangle = b^2 - 4ac$$

las soluciones (también llamadas raíces) son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\triangle}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\triangle}}{2a}$$

Casos:

- $\triangle = 0$: compatible con raíces iguales.
- $\triangle > 0$: compatible con raíces diferentes.
- $\triangle = 0$: incompatible en $\mathbb{R}$.

Teorema de Viete:

- Suma de raíces:

$$x_1 + x_2 = -b/a$$

- Producto de raíces:

$$x_1 x_2 = c/a$$

- Diferencia de raíces:

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{\triangle}/a$$

Propiedad de las ecuaciones equivalentes:

Dadas las ecuaciones de segundo grado:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

Son equivalentes si, y solo si:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Teorema de Bezout:

Dadas las ecuaciones de segundo grado:

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0$$
$$a_2x^2 + b_2x + c_2 = 0$$

Si tienen una raíz común, entonces se cumple:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)(b_1c_2 - b_2c_1) = (a_1c_2 - a_2c_1)^2$$

E. Ecuaciones fraccionarias polinómicas

Son aquellas que se presentan como división de dos polinomios. Son de la forma:

$$\frac{f(x)}{h(x)} = 0$$

Con $GA[h(x)] > 0$.

Método de solución

- Asegurar la existencia de cociente exigiendo $h(x) \neq 0$. De aquí, pueden obtenerse valores que no puede asumir x y que deberán ser descartados, si es el caso, de las obtenidas en la solución de $f(x) = 0$.
- Si es posible, usar factorización para reducir la ecuación fraccionaria a una polinomial aplicando simplificación de términos.
- Finalmente, el conjunto solución será dado por los elementos que satisfacen la ecuación anterior excluyendo los valores de x hallados en la primera parte.

INECUACIONES

Son desigualdades que mantiene el sentido de su desigualdad para valores particulares de sus variables. Por ejemplo:

$$3x - 2 < x + 4 \iff x < 3$$

Conjunto solución: Es el conjunto denotado por CS formado por todas las soluciones de una inecuación.

A. Inecuaciones de 1er grado

Aquellas que luego de reducirse, admiten una de las siguientes formas:

$$ax + b > 0 \ \vee \ ax + b < 0$$
$$ax + b \geq 0 \ \vee \ ax + b \leq 0$$

Siendo x la incógnita y $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

Método de solución

Consideraremos el caso: $ax + b < 0$

- $a > 0 \implies x < -b/a \implies CS = \langle -\infty, -b/a \rangle$
- $a < 0 \implies x > -b/a \implies CS = \langle -b/a, +\infty \rangle$

Los casos menor o igual y mayor o igual, tienen el conjunto solución con un extremo cerrado en el intervalo.

B. Inecuaciones de 2er grado

Aquellas que luego de reducirse, admiten una de las siguientes formas:

$$ax^2 + bx + c > 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c < 0$$
$$ax^2 + bx + c \geq 0 \quad \vee \quad ax^2 + bx + c \leq 0$$

Siendo x la incógnita y $a, b, c \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$.

Propiedades

- $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c > 0 \iff a > 0 \ \wedge \ \triangle < 0$
- $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c < 0 \iff a < 0 \ \wedge \ \triangle < 0$

C. Inecuaciones de grado superior

Aquellas que luego de reducirse, admiten una de las siguientes formas:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n > 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \geq 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n < 0$$
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \leq 0$$

Siendo x la incógnita, $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n\} \subset \mathbb{R}$, $a_0 \neq 0$ y $n \geq 3$.

Método de solución: Puntos críticos

1. Verificar que $a_0 > 0$.
2. Todos los términos de la inecuación deben estar en el primer miembro.
3. Se factoriza la expresión del primer miembro.
4. Cada factor se iguala a cero, obteniendo los llamados puntos críticos.
5. Se ubican los puntos críticos en la recta numérica.
6. Cada zona determinada por dos puntos de corte consecutivos se señala alternadamente de derecha hacia la izquierda con los signos $+$ y $-$, iniciando siempre con el signo $+$.
7. Si la inecuación es de tipo$>$ o $\geq$, el CS será la unión de las zonas de signo $+$. Si la inecuación es de tipo $<$ o $\leq$, el CS será la unión de las zonas de signo $-$.

Teorema: Dado $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$

- $(x-a)^{2n+1} \geq 0 \Leftrightarrow (x-a) \geq 0.$
- $(x-a)^{2n+1} \leq 0 \Leftrightarrow (x-a) \leq 0.$

D. Inecuaciones fraccionarias polinómicas

Aquellas que luego de reducirse toman la forma:

$$\frac{p(x)}{q(x)} \gtrless 0$$

Con $GA[q(x)] > 0$.

Método de solución

- Excluir los puntos que anulan a $q(x)$.
- Colocar el denominador junto al numerador y resolver la inecuación equivalente: $q(x)p(x) \gtrless 0$.

E. Inecuaciones con valor absoluto

Son todas aquellas inecuaciones que involucran expresiones con valor absoluto. Para su solución se tienen en cuenta las propiedades:

1. $|x| \leq b \Leftrightarrow b \geq 0 \ \wedge -b \leq x \leq b$
2. $|x| \geq b \Leftrightarrow x \geq b \ \vee x \leq -b$
3. $|x| \leq |a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a) \leq 0$
4. $|x| \geq |a| \Leftrightarrow (x+a)(x-a) \geq 0$

Y análogamente para los casos sin igualdad.

F. Inecuaciones con radicales

Son todas aquellas inecuaciones que involucran radicales, teniendo como expresión sub-radical una expresión polinómica en la variable.

- **Caso I:** $\sqrt[2n]{x} < y, \ n \in \mathbb{N}$

  Para obtener el CS debe resolverse:

  $$x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x < y^{2n}$$

- **Caso II:** $\sqrt[2n]{x} > y, \ n \in \mathbb{N}$

  Para obtener el CS debe resolverse:

  $$A: \quad x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x > y^{2n}$$
  $$B: \quad x \geq 0 \wedge y < 0$$

  Y unir lo obtenido en A con lo obtenido en B.

- **Caso III:** $\sqrt[2n+1]{x} < y, \ \sqrt[2n+1]{x} > y, \ n \in \mathbb{N}$

  Simplemente se deben elevar ambos miembros al exponente $2n+1$ y proceder con los métodos ya estudiados.

Otros casos importantes

- $\sqrt[2n]{f(x)} < \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow f(x) \geq 0 \wedge f(x) < g(x)$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \leq \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow f(x) \geq 0 \wedge f(x) \leq g(x)$
- $\sqrt[2n]{f(x)} > \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow g(x) \geq 0 \wedge f(x) > g(x)$
- $\sqrt[2n]{f(x)} \geq \sqrt[2n]{g(x)} \Longrightarrow f(x) \geq 0 \wedge f(x) \geq g(x)$

G. Inecuaciones exponenciales

Son todas aquellas inecuaciones que involucran a la variable en algún exponente. Los casos más comunes son:

$$a^x < a^y, \ a^x \leq a^y, \quad a^x > a^y, \quad a^x \geq a^y$$

- **Caso I:** $a > 1$

  $$a^{p(x)} < a^{q(y)} \Longrightarrow p(x) < q(y)$$
  $$a^{p(x)} > a^{q(y)} \Longrightarrow p(x) > q(y)$$

- **Caso II:** $0 < a < 1$

  $$a^{p(x)} < a^{q(y)} \Longrightarrow p(x) > q(y)$$
  $$a^{p(x)} > a^{q(y)} \Longrightarrow p(x) < q(y)$$

Y análogamente para las relaciones que contienen una igualdad.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el valor de x a partir de la siguiente ecuación:

$$\frac{x-a}{ab} - \frac{x-b}{ac} = \frac{x-c}{bc}$$

Solución

Multiplicando la ecuación por abc:

$$c(x-a) - b(x-b) = a(x-c)$$

Resolviendo:

$$cx - ca - bx + b^2 = ax - ac$$
$$cx - bx - ax = -b^2$$
$$x(c-b-a) = -b^2$$

Y despejando:

$$x = \frac{b^2}{(a+b-c)}$$

SISTEMAS DE ECUACIONES

A. Sistema lineal 2×2

Es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y = a_3 \\ b_1x + b_2y = b_3 \end{cases}$$

Este sistema es:

- ✓ **Compatible determinado**: Cuando

$$\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$$

- ✓ **Compatible indeterminado**: Cuando

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

- ✓ **Incompatible**: Cuando

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{a_3}{b_3}$$

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Sustitución: Se da cuando en una de las ecuaciones una de las variables se expresa en términos de la otra y posteriormente se reemplaza en la otra ecuación. Esto lleva a una ecuación de una variable (la que no se despejó al inicio) que, al resolverla, su valor puede ser reemplazado en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la otra variable.

Igualación: Se da cuando en ambas ecuaciones se despeja una misma variable en términos de la otra y estas se igualan. Esto lleva a la obtención del valor de una de ellas, que al reemplazase en cualquiera de las dos ecuaciones originales, permite hallar el valor de la variable faltante.

Reducción: Se da cuando una de las ecuaciones se multiplica por un factor adecuado de modo que el nuevo coeficiente obtenido en una de las variables es opuesto al de esta misma variable en la otra ecuación. Esto permite sumar ambos miembros de las ecuaciones obteniendo una ecuación unificada en una sola variable, que, al resolverla, permitirá usar el valor de esta variable en cualquiera de las dos ecuaciones originales para obtener el valor de la variable faltante.

B. Sistema lineal 3×3

Es de la forma:

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z = a_4 \\ b_1x + b_2y + b_3z = b_4 \end{cases}$$

Y se resuelve mediante reducción tomando las ecuaciones dos a dos, buscando reducir el sistema a uno de tipo 2×2. El sistema es:

- ✓ **Compatible determinado**: Cuando luego de aplicar el método de reducción se llega a un único valor para cada variable.
- ✓ **Compatible indeterminado**: Cuando luego de aplicar el método de reducción se llega a una expresión de tipo $0 = 0$.
- ✓ **Incompatible**: Cuando luego de aplicar el método de reducción se llega a una expresión de tipo $1 = 0$.

C. Sistema no lineal

Son aquellos que presentan ecuaciones que no son de grado uno. Para dar solución a este tipo de sistemas no hay un criterio común ya que depende de la estructura del sistema. Lo que se recomienda es usar las propiedades algebraicas convenientes para eliminar poco a poco las variables y poder quedar con sistemas más pequeños que sean fáciles de resolver.

Ejm.

Hallar la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

En este caso, es conveniente despejar y en la primera ecuación y reemplazarla en la segunda:

$$\begin{aligned} y = 1 - x \Rightarrow x^2 + (1-x)^2 &= 25 \\ x^2 + 1 - 2x + x^2 &= 25 \\ 2x^2 - 2x - 24 &= 0 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x-4)(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Luego:

- ➢ Si $x = 4$ se tendrá que $y = -3$
- ➢ Si $x = -3$ se tendrá que $y = 4$

Por lo que el conjunto solución es:

$$CS = \{(4,-3), (-3,4)\}$$

RELACIONES

A. Relación binaria

Dados los conjuntos no vacíos A y B, se llama relación binaria de A en B a todo subconjunto $\mathcal{R}$ del producto cartesiano $A \times B$.

B. Determinación de una relación

- **Por extensión:** Cuando sus elementos son presentados de forma explícita.
- **Por comprensión:** Cuando sus elementos se determinan mediante un enunciado abierto.

C. Dominio y rango de una relación $\mathcal{R}$

- **Dominio:** Subconjunto del conjunto de partida donde cada elemento es primera componente de los elementos de $\mathcal{R}$. Se denota por $Dom\,\mathcal{R}$.
- **Rango:** Subconjunto del conjunto de llegada donde cada elemento es segunda componente de los elementos de $\mathcal{R}$. Se denota por $Ran\,\mathcal{R}$.

D. Gráfica de una relación $\mathcal{R}$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$

Cuando $\mathcal{R}$ es expresada por el enunciado abierto $F(x,y)=0$, se tiene $Dom\mathcal{R} \subset X$ y $Ran\mathcal{R} \subset X$, y para conocer la extensión de su representación hay que hallar las intersecciones y las simetrías respecto a los ejes. A saber, si $F(x,y)=F(x,-y)$, entonces hay simetría respecto al eje X, y si $F(x,y)=F(-x,y)$, hay simetría respecto al eje Y. También pueden existir asíntotas verticales, estas se obtienen al despejar $y=p(x)/q(x)$ y resolver $q(x)=0$, las soluciones $x=x_0$ representan las rectas llamadas asíntotas verticales.

Análogamente, las asíntotas horizontales son rectas horizontales $y=y_0$ que dan solución a $N(y)=0$, siendo el despeje $x=M(y)/N(y)$.

Con estos criterios, la tabulación permite dar un esbozo de la gráfica de $\mathcal{R}$ dada por:

$$Gr\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: F(x,y)=0\}$$

E. Criterio práctico para relaciones definidas por inecuaciones

Dada una relación definida por:

$$F(x,y)<0\,, F(x,y)\leq 0$$
$$F(x,y)>0\,, F(x,y)\geq 0$$

Su gráfica es una región sombreada obtenida según los siguientes pasos:

I. Expresar la inecuación dada como:
   a) $y>f(x)$
   b) $y<f(x)$

II. Reconocer la región asociada:
   a) $y>f(x)$ representa la zona limitada inferiormente por el borde de la curva $y=f(x)$, sin incluir el borde.
   b) $y<f(x)$ representa la zona limitada superiormente por el borde de la curva $y=f(x)$, sin incluir el borde.

III. Si en (a) o (b) se incluye la igualdad, la zona asociada sí incluye el borde.

FUNCIONES

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se llama función de A en B a la relación $f \subset A \times B$ en la que a cada $x \in A$ le corresponde un único $y \in B$. Así, como toda función es una relación, las definiciones de dominio y rango se mantienen.

Ejm.:

$$f_1=\{(1,a),(2,b),(3,c)\}$$

A. Función real de variable real

Aquellas con su conjunto partida A y su conjunto de llegada B contenidos en $\mathbb{R}$. Se denotan por:

$$f: A \longrightarrow B$$
$$x \longmapsto f(x)=y$$

Que se lee "f de x igual a y." Donde:
x: variable independiente
y: variable dependiente

B. Regla de correspondencia

Es la asignación de los elementos de la función mediante un enunciado abierto de carácter algebraico. Se denota $f=\{(x,y)\in A\times B: f(x)\}$.

C. Igualdad de funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, son iguales si y solo si:

1. $Domf=Domg$
2. Para todo x: $f(x)=g(x)$

D. Operaciones con funciones

Dadas dos funciones reales de variable real, f y g, para las cuales llamaremos $D=Domf\cap Domg$:

1. Adición y sustracción:
$$(f\pm g)(x)=f(x)\pm g(x), \forall x\in D$$
2. Multiplicación:
$$(fg)(x)=f(x)g(x), \forall x\in D$$
3. División:
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \forall x\in D-\{x: g(x)=0\}$$

E. Tipos de funciones

La función real de variable real $f: A \longrightarrow B$, es:

1. Función inyectiva: $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$
2. Función sobreyectiva: $Ranf = B$
3. Función biyectiva: Si es inyectiva y sobreyectiva.
4. Monótona no decreciente:
$$a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$$
5. Monótona no creciente:
$$a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$$
6. Monótona creciente:
$$a < b \Rightarrow f(a) < f(b)$$
7. Monótona decreciente:
$$a < b \Rightarrow f(a) > f(b)$$

F. Composición de funciones

Dadas dos funciones, $f: A \longrightarrow B$ y $g: B \longrightarrow C$ tales que $Ranf \cap Domg \neq \emptyset$, se define g compuesta con f como:

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$
$$Dom(g \circ f) = \{x \in Domf: f(x) \in Domg\}$$

G. Función inversa

Dada la función $f: A \longrightarrow B$ inyectiva, entonces se define su función inversa como:

$$f^{-1} = \{(f(x), x) \in B \times A: x \in Domf\}$$

Propiedades:

1. $Domf^{-1} = Ranf \ \wedge \ Ranf^{-1} = Domf$
2. $(f^{-1})^{-1} = f$
3. $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = Id.$
4. $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$, para g compatible.

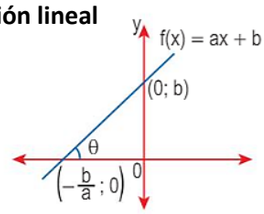
H. Gráfico de una función

Dada una función f real de variable real, el gráfico es un conjunto que se representa gráficamente en el plano Cartesiano $\mathbb{R}^2$:

$$Graf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y = f(x) \wedge x \in Domf\}$$

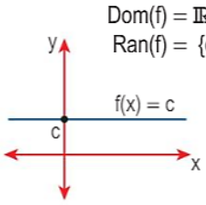
I. Funciones elementales

1. Función lineal

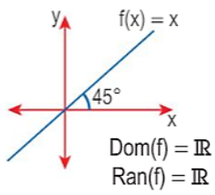


Dom(f) = ℝ
Ran(f) = ℝ

2. Función constante y función identidad



Dom(f) = ℝ
Ran(f) = {c}

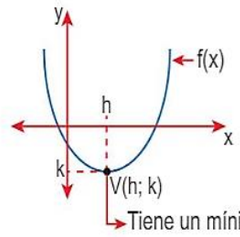


Dom(f) = ℝ
Ran(f) = ℝ

3. Función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$

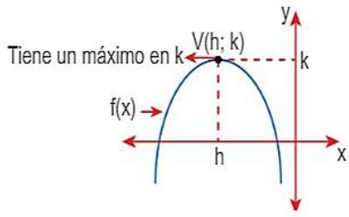
La gráfica es una parábola de vértice (h, k), donde $h = -b/2a$ y $k = f(h)$.

Si **a > 0**, la parábola se abre hacia arriba.



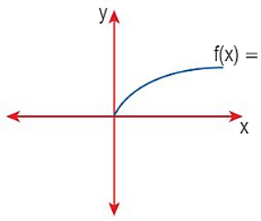
Dom(f) = ℝ
Ran(f) = [k; +∞⟩

Si **a < 0,** la parábola se abre hacia abajo.

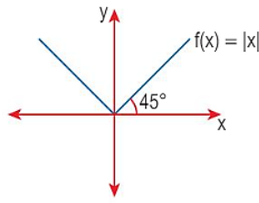


Dom(f) = ℝ
Ran(f) = ⟨−∞; k]

4. Función raíz cuadrada y valor absoluto

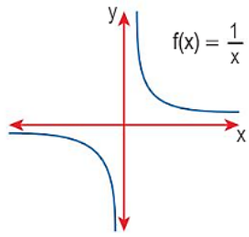


Dom(f) = [0; +∞⟩
Ran(f) = [0; +∞⟩



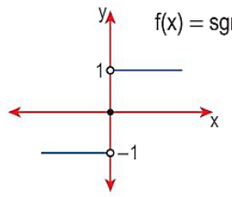
Dom(f) = ℝ
Ran(f) = [0; +∞⟩

5. Función inverso multiplicativo



Dom(f) = ℝ − {0}
Ran (f) = ℝ − {0}

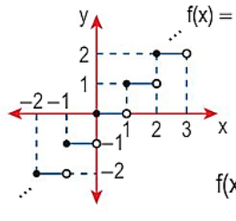
6. Función signo



$$f(x) = sgn(x) = \begin{cases} 1; x > 0 \\ 0; x = 0 \\ -1; x < 0 \end{cases}$$

Dom(f) = ℝ
Ran (f) = {−1; 0; 1}

7. Función máximo entero

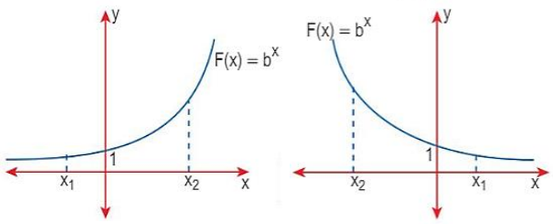


$$f(x) = \begin{cases} 2; x \in [2; 3\rangle \\ 1; x \in [1; 2\rangle \\ 0; x \in [0; 1\rangle \\ -1; x \in [-1; 0\rangle \\ -2; x \in [-2; -1\rangle \end{cases}$$

Dom(f) = ℝ
Ran(f) = ℤ

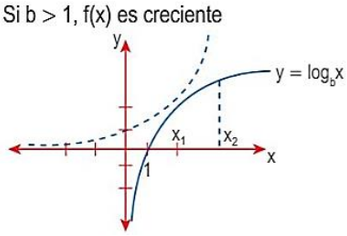
8. Función exponencial $f(x) = b^x$

Si b > 1, F(x) es creciente. Si 0 < b < 1, F(x) es decreciente.



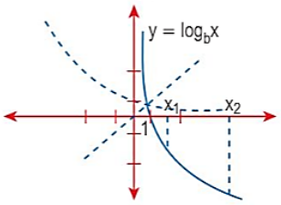
9. Función logarítmica $f(x) = \log_b x$

Si b > 1, f(x) es creciente



DomF(x) = ⟨0; +∞⟩
RanF(x) = ℝ

Si 0 < b < 1, F(x) es decreciente.

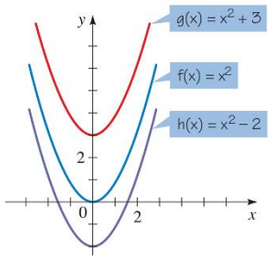


DomF(x) = ⟨0; +∞⟩
RanF(x) = ℝ

J. Técnicas de graficado de funciones

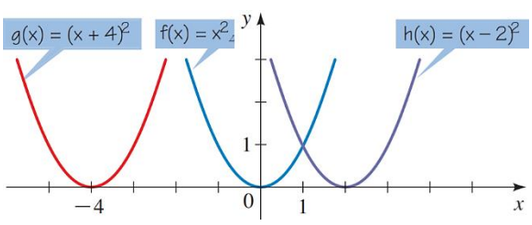
Desplazamiento vertical: Si $c > 0$ y si se conoce la gráfica de $y = f(x)$:

- Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$.
- Para graficar $y = f(x) - c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$.



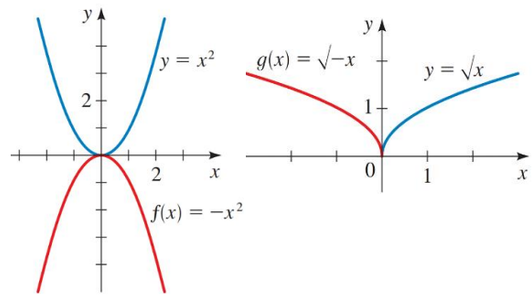
Desplazamiento vertical: Si $c > 0$ y si se conoce la gráfica de $y = f(x)$:

- Para graficar $y = f(x - c)$, desplace c unidades hacia la derecha la gráfica de $y = f(x)$.
- Para graficar $y = f(x + c)$, desplace c unidades hacia la izquierda la gráfica de $y = f(x)$.



Reflexión: Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$:

- La gráfica de $y = -f(x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje X.
- La gráfica de $y = f(-x)$ se obtiene por reflexión de la gráfica de $y = f(x)$ respecto al eje Y.



Compresión y alargamiento: Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$:

- Para $0 < k < 1$, la gráfica de $y = kf(x)$ se obtiene comprimiendo verticalmente la gráfica de $y = f(x)$. Y si $k > 1$, la gráfica de $y = kf(x)$ se obtiene mediante un alargamiento vertical.

- Para $0 < k < 1$, la gráfica de $y = f(kx)$ se obtiene alargando horizontalmente la gráfica de $y = f(x)$. Y si $k > 1$, la gráfica de $y = kf(x)$ se obtiene mediante una compresión horizontal.

Valor absoluto: Si se conoce la gráfica de $y = f(x)$:

- Para obtener la gráfica de $y = |f(x)|$ se reflejan respecto al eje X las partes que están por debajo de este eje y se mantienen las demás.

- Para obtener la gráfica de $y = f(|x|)$ se mantienen las partes correspondientes a $[0, x\rangle \cap Domf$. Además, para $x < 0$ se refleja respecto al eje Y la parte correspondiente a $\langle 0, -x\rangle \cap Domf$, es decir, $y = f(|x|)$ es simétrica respecto al eje Y.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar los valores de n para que el siguiente sistema de ecuaciones sea compatible determinado:

$$\begin{cases} nx + 4y = 11 \\ 9x + ny = 13 \end{cases}$$

Solución

Por las condiciones que establece el sistema, debe cumplirse que:

$$\frac{n}{9} \neq \frac{4}{n}$$

Por lo que $n^2 \neq 36$, es decir $n \in \mathbb{R} - \{-6, 6\}$

2. Si el siguiente sistema no tiene solución:

$$\begin{cases} (k+3)x + (2k+3)y = 75 \\ (k-3)x + (k-1)y = 25 \end{cases}$$

Hallar el valor de k.

Solución

Como es un sistema incompatible, se tiene que:

$$\underbrace{\frac{k+3}{k-3}}_{I} = \underbrace{\frac{2k+3}{k-1}}_{II} \neq \underbrace{\frac{75}{25}}_{III}$$

De (I) y (II) se obtiene:

$$k^2 - 5k - 6 = 0 \Rightarrow (k-6)(k+1) = 0$$

De donde:

$$k \in \{-1, 6\}$$

Ahora, si $k = -1$ y al reemplazar en (II) y (III):

$$\frac{2(-1)+3}{-1-1} = -\frac{1}{2} \neq \frac{75}{25} \ldots VERDADERO$$

Pero, si $k = 6$ y al reemplazar en (II) y (III):

$$\frac{2(6)+3}{6-1} = 3 \neq \frac{75}{25} \ldots FALSO$$

Por lo que el único valor que cumple es $k = -1$.

3. Hallar el rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1, \ \forall x \in [2,5]$$

Solución

A partir del dominio $[2,5]$ se trata de formar la expresión $f(x)$:

$$2 \leq x \leq 5$$
$$1 \leq x - 1 \leq 4$$
$$0 \leq (x-1)^2 \leq 4^2$$
$$0 \leq x^2 - 2x + 1 \leq 16$$
$$4 \leq x^2 - 2x + 5 \leq 20$$
$$2 \leq \sqrt{x^2 - 2x + 5} \leq \sqrt{20}$$
$$3 \leq \sqrt{x^2 - 2x + 5} + 1 \leq \sqrt{20} + 1$$

Finalmente:

$$3 \leq f(x) \leq \sqrt{20} + 1$$

$$Ran\ f = [3, \sqrt{20} + 1]$$

4. Determinar si la siguiente función es sobreyectiva:

$$f: <0,5] \longrightarrow [-4,5]$$
$$x \longmapsto f(x) = x^2 - 4x$$

Solución

Partimos del dominio:

$$\begin{aligned} 0 < x \leq 5 &\Leftrightarrow -2 < x - 2 \leq 3 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq (x-2)^2 \leq 9 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq (x-2)^2 - 4 \leq 5 \\ &\Leftrightarrow -4 \leq x^2 - 4x \leq 5 \end{aligned}$$

Como el rango coincide con el conjunto de llegada, se puede afirmar que f es sobreyectiva.

5. Hallar el rango de $f(x) = -x^2 + 2x$, si su dominio es el conjunto de los números reales.

Solución

Completando cuadrados:

$$\begin{aligned} f(x) &= -(x^2 - 2x + 1) + 1 \\ &= -(x-1)^2 + 1 \end{aligned}$$

Por lo que el máximo valor de f es $y = 1$. En conclusión:

$$Ran\ f = <-\infty, 1]$$

MATRICES

Una matriz es un conjunto de elementos dispuestos en filas y columnas. Se denotan con letras mayúsculas organizan sus elementos dentro de paréntesis o corchetes. Su representación general es dada por:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Donde cada elemento tiene dos subíndices que indican la fila y la columna donde se ubica. La notación abreviada es dada por:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}$$

Donde $m\times n$ es llamado orden de la matriz y representa su número de filas y de columnas, respectivamente.

Definiciones básicas

- Si $m\neq n$, se dice que la matriz es rectangular.
- Si $m=n$, se dice que la matriz es cuadrada.
- Si $m=1$, se dice que es una matriz fila.
- Si $n=1$, diremos que es una matriz columna.
- Si $A=(a_{ij})_{m\times n}$ con $a_{ij}=0,\forall i,j$; la matriz es llamada matriz nula y se denota $A=\mathbf{0}$.

A. Igualdad de matrices

Si dos matrices del mismo orden $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$, son tales que $a_{ij}=b_{ij},\forall i,j$, se dice que son iguales y se escribe $A=B$.

B. Operaciones con matrices

- **Adición y sustracción:** Dadas dos matrices del mismo orden $A=(a_{ij})_{m\times n}$ y $B=(b_{ij})_{m\times n}$, se definen la suma y resta:

$$A\pm B=(a_{ij})_{m\times n}\pm(b_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$$

- **Multiplicación escalar:** Dado $k\in\mathbb{R}$ y una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$, se define el producto escalar:

$$kA=k(a_{ij})_{m\times n}=(ka_{ij})_{m\times n}$$

- **Multiplicación de matriz fila por matriz columna:** Dada la matriz fila $A=(a_{1j})_{1\times n}$ y la matriz columna $B=(b_{i1})_{n\times 1}$, define:

$$AB=(a_{11}\,a_{12}\ldots a_{1n})_{1\times n}\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}\right)_{1\times 1}$$

- **Multiplicación de matrices:** Dadas dos matrices $A=(a_{ij})_{m\times p}$ y $B=(b_{ij})_{p\times n}$, se define:

$$AB=(c_{ij})_{m\times n}\Leftrightarrow c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

Es decir, c_{ij} es obtenido al multiplicar la i-ésima fila de A por la j-ésima columna de B.

Teorema:

Sean A,B y C matrices para las cuales se definen la adición y multiplicación. Entonces:

- $A+B=B+A$
- $k(A+B)=kA+kB,\ \forall\, k\in\mathbb{R}$
- $(k+r)A=kA+rA,\ \ \forall\, k,r\in\mathbb{R}$
- $k(rA)=(kr)A,\ \forall\, k\in\mathbb{R}$
- $ABC=(AB)C=A(BC)$
- $A(B+C)=AB+AC$
- $(B+C)A=BA+CA$
- $AB=\mathbf{0}\nRightarrow A=\mathbf{0}\ \vee B=\mathbf{0}$
- $AB=AC\nRightarrow B=C$
- En general: $AB\neq BA$

C. Matriz transpuesta

Dada una matriz $A=(a_{ij})_{m\times n}$, de define su matriz transpuesta $A^T=(a_{ji})_{n\times m}$ como la matriz que se obtiene al transformar las filas de A en sus columnas.

Ejm.:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \pi \\ \sqrt{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}\Longrightarrow A^T=\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 3 & 4 \\ \pi & 2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

Sean A,B matrices y $k\in\mathbb{R}$.

- $(A+B)^T=A^T+B^T$
- $(kA)^T=kA^T$
- $(A^T)^T=A$
- $(AB)^T=B^TA^T$

D. Clasificación de matrices cuadradas

1. **Diagonal principal:** Dada una matriz cuadrada A de orden n, la diagonal principal está formada por los elementos $a_{ii}, \forall i$.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2. **Matriz diagonal:** Es toda matriz cuadrada no nula, en la que los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

3. **Matriz escalar:** Es aquella matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

4. **Matriz identidad:** Es aquella matriz cuadrada en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a uno.

5. **Matriz triangular superior:** Es aquella matriz cuadrada en la que los elementos bajo la diagonal principal son ceros.

6. **Matriz triangular inferior:** Es aquella matriz cuadrada en la que los elementos sobre la diagonal principal son ceros.

7. **Matriz simétrica:** Aquella matriz cuadrada A que verifica: $A^T = A$. Se caracteriza porque la diagonal actúa como espejo: $a_{ij} = a_{ji}\ , \forall\ i, j$.

8. **Matriz antisimétrica:** Aquella matriz cuadrada A que verifica: $A^T = -A$.

9. **Traza de una matriz:** Es el valor de la suma de los elementos de la diagonal principal.

$$traz(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Propiedades:
Sean A, B matrices cuadradas y $k \in \mathbb{R}$.

- $traz(A \pm B) = traz(A) \pm traz(B)$
- $traz(kA) = k\ traz(A)$
- $traz(AB) = traz(BA)$

10. **Potencia de una matriz:** Sea A una matriz cuadrada de orden n, entonces, para $m \in \mathbb{N}$:

$$A^m = \begin{cases} I_n\ , & m = 0 \\ A\ , & m = 1 \\ \underbrace{AA \dots A}_{m\ veces}, & m \geq 2 \end{cases}$$

11. **Matriz idempotente:** Aquella matriz cuadrada A que verifica: $A^2 = A$.

12. **Matriz involutiva:** Aquella matriz cuadrada A de orden n que verifica: $A^2 = I_n$.

13. **Matriz nilpotente de índice m:** Aquella matriz cuadrada A que verifica: $A^m = \mathbf{0}$.

DETERMINANTES

A. Determinante

Es un valor numérico que se asocia a una matriz cuadrada A y se denota por $|A|$ o por $\det(A)$.

Determinante de orden 1: Es definido como el elemento de la matriz.
Ejm.:

$$A = (-4) \Longrightarrow |A| = -4$$

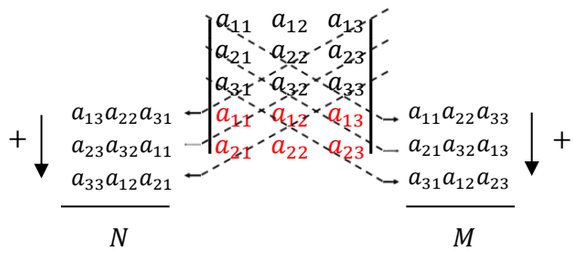
Determinante de orden 2: Se define así:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Determinante de orden 3: Su desarrollo es dado en forma práctica por la regla de Sarrus:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = M - N$$

Donde:



Propiedades:
Sean A, B matrices cuadradas y $k \in \mathbb{R}$.

- $|A + B| \neq |A| + |B|$
- $|AB| = |A||B|$
- $|A^T| = |A|$
- $|kA| = k^n|A|$, si A es de orden n.
- $|A^m| = |A|^m$, $m \in \mathbb{N}$
- Si dos filas o dos columnas de A son proporcionales, entonces $|A| = 0$.
- Si se permutan dos filas o dos columnas consecutivas, el determinante cambia de signo.

- Si a una fila (o columna) se le adiciona un múltiplo de otra fila (o columna), el determinante no varía.
- Si los elementos de una fila o columna se multiplican por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número
- El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior o diagonal, es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- Si todos los elementos de una fila o columna son ceros, el determinante es cero.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Dada la matriz A de orden 8 definida por:

$$a_{ij} = 2i + j^2$$

determinar su traza.

Solución:
Por definición de traza, se tiene que:

$$traz(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{88}$$

Y reemplazando:

$$\begin{aligned} traz(A) &= 2(1 + \cdots + 8) + (1^2 + \cdots + 8^2) \\ &= \frac{2[8(8+1)]}{2} + \frac{[8(8+1)(2(8)+1)]}{6} \\ &= (8)(9) + (4)(3)(17) \\ &= 72 + 204 \\ &= 276 \end{aligned}$$

2. Hallar $a^2 + (2b)^2$, si $AB = 3I$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Reemplazando

$$\begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.0 - 2b & a.1 - 2.1 \\ 3.0 + 0.b & 3.1 + 0.1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2b & a-2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{... por dato}$$

Igualando:

$$-2b = 3 \Rightarrow b = -\frac{3}{2}$$
$$a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2$$

Finalmente:

$$a^2 + (2b)^2 = (2)^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$$

3. Determinar $m + n$, si las matrices A y B son conmutables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:
Igualando $AB = BA$, se obtiene:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 1 \\ n & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2m-n & -3 \\ 3m+n & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+3 & -m+1 \\ 2n+15 & -n+5 \end{pmatrix}$$

y por igualdad de matrices:

$$-3 = -m + 1 \Rightarrow m = 4$$
$$8 = -n + 5 \Rightarrow n = -3$$

Finalmente, $m + n = 1$.

4. Determinar la suma de los elementos de A^{20}, si:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:
Calculando las potencias se tiene que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Por propiedad de potencia de una matriz diagonal, se tiene que:

$$A^3 = 6I \Rightarrow A^{40} = (A^3)^{13}A = 6^{13}A$$

Es decir:

$$A^{40} = 6^{13}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuya suma de elementos es:

$$S = 6^{13}(1 + 2 + 3) = 6^{13}.6 = 6^{14}$$

5. Calcular la determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:
Observando la estructura de los elementos, se identifica la tercera columna proporcional a la segunda en razón 2: 1. Por lo tanto:

$$|A| = 0$$